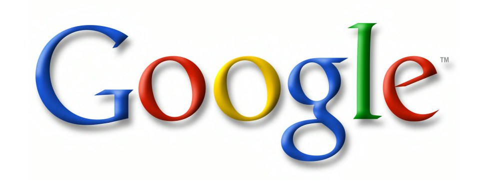
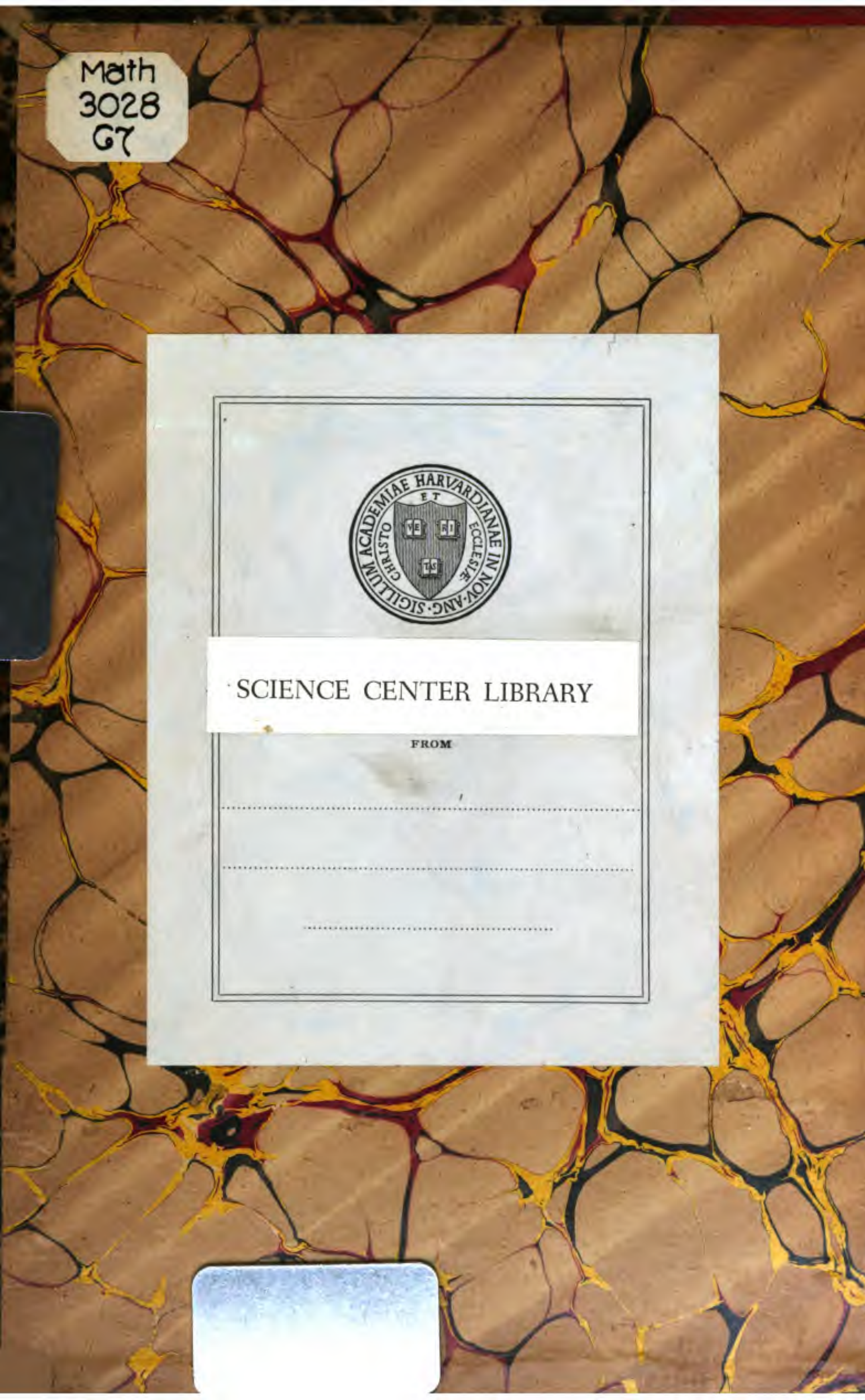





Math
3028
G7
SIGILLUM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV·ANG·
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS
SCIENCE CENTER LIBRARY
FROM





James Lee Love
Camb. Mass.
1897.



EXERCICES MÉTHODIQUES

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

0

EXERCICES MÉTHODIQUES

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL,

PAR

M. Ed. BRAHY,

DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES, CONDUCTEUR HONORAIRE DES MINES,
PROFESSEUR A L'ATHÉNÉE ROYAL DE BRUGES.



BRUXELLES,

M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE,

Rue de l'Orangerie, 16.

—

1867

James L. Love
Waverley

PRÉFACE.

Mon seul but en publiant ce recueil d'exercices, est d'être réellement utile aux jeunes gens qui abordent le calcul infinitésimal.

Pour atteindre ce but, le moyen le meilleur m'a paru de rappeler en tête de chaque partie traitée les résultats principaux de la théorie, puis de développer quelques exemples d'application, de telle sorte que la marche dans des questions semblables fût clairement tracée; enfin, de présenter à la suite un nombre suffisant d'exercices du même genre, en ne fournissant que les réponses, afin de laisser à l'élève, dans le raisonnement et dans le calcul, cette initiative qui seule conduit à de véritables progrès.

Autant que possible, j'ai disposé la matière de manière à graduer la difficulté, et quand celle-ci, trop grande, m'aurait semblé devoir rebuter l'étudiant, j'ai indiqué, quelquefois détaillé, le procédé de résolution.

Quoique bon nombre d'exercices m'appartiennent et que j'en aie laborieusement vérifié les solutions, je ne les réclame point comme miens; ils ne constituent qu'un travail d'imitation destiné à combler des lacunes dans l'arrangement adopté ou

à mettre certains points de la théorie en lumière. Les autres questions ont été puisées principalement dans les recueils anglais et allemands, abondants sur le même sujet.

J'ai rarement indiqué les sources; c'est que le plus souvent pour trouver les véritables, il faut remonter aux auteurs qui, les premiers, ont écrit sur le calcul infinitésimal ou à ceux qui y ont introduit des théorèmes nouveaux et féconds; les ouvrages de ces grands mathématiciens sont cités dans les cours.

Dans mon désir de présenter un travail méthodique et complet, j'ai consacré cinq chapitres à la différentiation proprement dite, le dernier de ceux-ci à un essai sur la dérivation des équations, sujet qui ne reçoit pas toujours l'extension que son importance exige. Plus loin, j'ai offert des applications du développement des fonctions non-seulement par les théorèmes de Taylor et de de Maclaurin, mais encore par celui de Lagrange. Enfin, j'ai traité dans le dernier chapitre de la décomposition des fractions rationnelles en fractions plus simples, question qu'il est nécessaire d'étudier avant d'aborder le calcul intégral et à la résolution de laquelle je n'ai employé que les procédés fournis par le calcul différentiel; les autres, le plus souvent moins rapides, étant du ressort de l'algèbre.

Si, comme je l'ai pensé, ce livre répond à un véritable besoin, je me hâterai de publier des *Exercices méthodiques de calcul intégral,* recueil conçu dans le même plan et dans le même esprit.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

EXERCICES MÉTHODIQUES

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE I.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS EXPLICITES D'UNE SEULE VARIABLE.

Nous supposons connus les principes généraux de la dérivation et de la différentiation, mais nous croyons utile de rappeler sommairement les théorèmes sur les dérivées et les différentielles des fonctions dont on fait immédiatement usage dans le calcul différentiel.

Dans l'énoncé de ces théorèmes, u, v, w, etc., représentent des fonctions de x; a une quantité constante.

1. La dérivée d'une quantité constante est nulle.

2. La dérivée d'une somme algébrique de fonctions est égale à la somme algébrique des dérivées de ces fonctions.

Soit

$$y = u - v + w \pm \text{etc.}$$

On a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} \pm \text{etc.}$$

3. La dérivée du produit de plusieurs fonctions est égale

à la somme que l'on obtient en multipliant la dérivée de chaque fonction par le produit des autres fonctions et additionnant les résultats.

Soit
$$y = uvw\ldots\ldots$$
La dérivée est
$$\frac{dy}{dx} = vw\ldots\frac{du}{dx} + uw\ldots\frac{dv}{dx} + uv\ldots\frac{dw}{dx} + \ldots\ldots$$

Ce théorème, en vertu du premier, renferme le suivant :

4. La dérivée du produit d'une fonction par une constante est égale au produit de la dérivée de cette fonction par la constante.

Soit
$$y = au.$$
Le théorème donne
$$\frac{dy}{dx} = a\frac{du}{dx}.$$

5. La dérivée du quotient de deux fonctions, ou d'une fraction dont chacun des termes est une fonction, est égale au dénominateur multiplié par la dérivée du numérateur, moins le numérateur multiplié par la dérivée du dénominateur, le tout divisé par le carré du dénominateur.

Soit
$$y = \frac{u}{v}.$$
Le théorème fournit
$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

6. La dérivée d'une fonction de fonctions est le produit des dérivées de ces fonctions, prises chacune par rapport à la variable qu'elle contient.

Soit une fonction u de x déterminée par les équations
$$u = \mathrm{F}(z),\ z = f(y),\ y = \varphi(x).$$

On obtient

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},$$

ou

$$\frac{du}{dx} = F'(z) . f'(y) . \varphi'(x),$$

suivant les notations admises.

7. La dérivée d'une fonction composée de plusieurs autres fonctions est égale à la somme des dérivées de la fonction composée prises successivement par rapport à chacune des fonctions composantes.

Soit $y = F(u, v, w....)$.

Le théorème donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx} + \frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} + \dots\dots$$

Observation. — En remplaçant dans les énoncés le mot *dérivée* par le mot *différentielle*, les théorèmes précédents s'appliquent aux différentielles.

8. La dérivée d'une fonction inverse d'une autre fonction dont on sait trouver la dérivée est égale à l'unité divisée par cette dernière dérivée.

Soient

$$y = F(x) \text{ et } x = \varphi(y)$$

deux fonctions inverses.

Le théorème fournit

$$F'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \cdot$$

Tableau des différentielles des fonctions simples.

(Dans ce tableau, comme dans tout ce qui suit, la caractéristique *Log* indique un logarithme pris dans un système quelconque, et *log* un logarithme népérien.)

$$d.\ x^m = mx^{m-1}\,dx,\ \text{d'où}\ d.\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

$$d.\ \text{Log}\,x = \text{Log}\,e\,\frac{dx}{x}.$$

$$d.\ \log x = \frac{dx}{x}.$$

$$d.\ a^x = a^x \log a\,dx.$$

$$d.\ e^x = e^x\,dx.$$

$$d.\ \sin x = \cos x\,dx.$$

$$d.\ \cos x = -\sin x\,dx.$$

$$d.\ \text{tang}\,x = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

$$d.\ \text{cotg}\,x = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

$$d.\ \sec x = \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}.$$

$$d.\ \text{cosec}\,x = -\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}.$$

$$d.\ \sin \text{vers.}\,x = \sin x\,dx.$$

$$d.\ \text{arc}\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$d.\ \text{arc}\cos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$d.\ \text{arc}\,\text{tang}\,x = \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$d.\ \text{arc}\,\text{cotg}\,x = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

$$d.\ \text{arc}\sec x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$d.\ \text{arc}\,\text{cosec}\, x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$d.\ \text{arc}\sin\text{vers}\, x = \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

En divisant par dx les deux membres de chacune des égalités contenues dans le tableau qui précède, on obtient les dérivées des fonctions simples.

Mais ce qu'il importe au plus haut point de remarquer, c'est que, dans le tableau, x représente non une simple variable, mais *toute fonction explicite de x.*

Il faut donc que les élèves, en traduisant en langage ordinaire les expressions que le formulaire renferme, exercice préparatoire que l'on ne saurait trop recommander, prètent à x la signification de fonction.

Ainsi l'égalité $d.\log x = \frac{dx}{x}$ se traduira :

La différentielle du logarithme népérien d'une fonction est égale à la différentielle de la fonction, divisée par la fonction.

Ou, puisque

$$\frac{d.\log x}{dx} = \frac{1}{x}:$$

La dérivée du logarithme népérien d'une fonction est égale à l'unité divisée par la fonction.

Nous ne saurions trop insister sur ce point, et les exemples suivants prouveront l'importance du conseil.

Exemple I.

Soit à différentier, par rapport à x, la fonction explicite

$$y = \sin\sqrt{a^2 - x^2}.$$

C'est avoir à chercher la différentielle du sinus de la fonction

$$\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Or, d'après le tableau, la différentielle du sinus d'une fonction est égale au cosinus de la fonction multiplié par la différentielle de la fonction.

Donc

$$dy = \cos \sqrt{a^2 - x^2} \quad d.\sqrt{a^2 - x^2}. \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

D'autre part, la différentielle de la racine carrée d'une fonction est égale à la différentielle de la quantité sub-radicale, divisée par deux fois le radical.

Par conséquent

$$d.\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{d.(a^2 - x^2)}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

et en substituant dans (1) cette valeur de

$$d.\sqrt{a^2 - x^2},$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \cos \sqrt{a^2 - x^2} \quad d.(a^2 - x^2). \qquad (3).$$

En troisième lieu, la différentielle d'une somme algébrique de fonctions est égale à la somme algébrique des différentielles de ces fonctions, d'où il suit que

$$d.(a^2 - x^2) = d.a^2 - d.x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

D'après le théorème I, la différentielle de a^2 est nulle; et d'après le tableau, la différentielle de x^2 est $2xdx$; donc

$$d.(a^2 - x^2) = -2xdx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Substituant dans (3) cette valeur de $d.(a^2 - x^2)$, on trouve enfin

$$dy = -\frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cos \sqrt{a^2 - x^2} \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

pour la différentielle cherchée.

La dérivée est

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \cos\sqrt{a^2-x^2} \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Telle est la solution développée de la question. Mais les énoncés des théorèmes, ceux des règles de la différentiation, les substitutions successives et les différentiations elles-mêmes devront être faits, autant que possible, mentalement ; de sorte que, avec l'habitude, on arrive à écrire pour ainsi dire immédiatement une différentielle cherchée. Ainsi, dans l'exemple précédent, on arrive aisément à l'expression (6) sans écrire les intermédiaires (1), (2), (3), (4) et (5).

A la vérité, pour résoudre la question, on aurait pu poser

$$\sqrt{a^2 - x^2} = z$$

et se proposer de trouver la différentielle de la fonction de fonction

$$y = \sin z, \quad z = \sqrt{a^2 - x^2},$$

mais sans employer cette manière indirecte, que l'on écartera autant que faire se peut, on arrive plus promptement au résultat par le procédé mental indiqué.

Exemple II.

Soit à chercher la différentielle de

$$y = \frac{a+x}{a-x} \text{ arc tang } \frac{a-x}{a+x}.$$

D'après le théorème 3,

$$dy = \frac{a+x}{a-x}\, d.\text{ arc tang } \frac{a-x}{a+x} + \text{arc tang } \frac{a-x}{a+x}\, d.\, \frac{a+x}{a-x} \quad (1).$$

Or, d'une part, d'après le tableau des différentielles,

$$d.\,\text{arc tang}\,\frac{a-x}{a+x}=\frac{d.\left(\frac{a-x}{a+x}\right)}{1+\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2},$$

ou, en effectuant la différentiation indiquée au numérateur du second membre (Théorème 5),

$$d.\,\text{arc tang}\,\frac{a-x}{a+x}=\frac{\frac{-(a+x)\,dx-(a-x)\,dx}{(a+x)^2}}{1+\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2},$$

ou, en simplifiant,

$$d.\,\text{arc tang}\,\frac{a-x}{a+x}=-\frac{adx}{a^2+x^2}\quad .\ .\ .\quad (2).$$

D'autre part,

$$d.\frac{a+x}{a-x}=\frac{(a-x)\,dx+(a+x)\,dx}{(a-x)^2},\ \text{(Théorème 5)},$$

ou

$$d.\frac{a+x}{a-x}=\frac{2\,adx}{(a-x)^2}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad (3).$$

Substituant dans (1) les valeurs de

$$d.\,\text{arc tang}\,\frac{a-x}{a+x}\ \text{et de}\ d.\frac{a+x}{a-x}$$

fournies par (2) et (3), on a, toutes réductions effectuées,

$$dy=\frac{a}{a-x}\left(\frac{2}{a-x}\,\text{arc tang}\,\frac{a-x}{a+x}-\frac{a+x}{a^2+x^2}\right)dx.$$

D'où

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{a-x}\left(\frac{2}{a-x}\,\text{arc tang}\,\frac{a-x}{a+x}-\frac{a+x}{a^2+x^2}\right).$$

Du reste, la dérivée s'obtiendrait en premier lieu en appliquant, dans le procédé, et les théorèmes sur les dérivées et le tableau des dérivées des fonctions simples.

Mais ce qu'il est important d'observer, c'est que l'habitude de se servir des théorèmes et des règles permet d'écrire immédiatement la différentielle de la fonction proposée comme suit :

$$dy = \frac{a+x}{a-x} \frac{\dfrac{-(a+x)\,dx-(a-x)\,dx}{(a+x)^2}}{1+\left(\dfrac{a-x}{a+x}\right)^2}$$

$$+ \text{arc tang} \frac{a-x}{a+x} \cdot \frac{(a-x)\,dx+(a+x)\,dx}{(a-x)^2},$$

expression qu'il n'y a plus qu'à simplifier pour obtenir le même résultat que précédemment.

Exemple III.

Soit encore à chercher la différentielle de

$$y = \frac{(x-1)^{\frac{5}{2}}(x-3)^{\frac{13}{2}}}{(x-2)^8}.$$

Prenant les logarithmes des deux membres, il vient

$$\log y = \frac{5}{2}\log(x-1) + \frac{13}{2}\log(x-3) - 8\log(x-2),$$

et la différentiation donne

$$\frac{dy}{y} = \frac{5}{2}\frac{dx}{x-1} + \frac{13}{2}\frac{dx}{x-3} - 8\frac{dx}{x-2},$$

ou

$$\frac{dy}{y} = \left[\frac{5}{2(x-1)} + \frac{13}{2(x-3)} - \frac{8}{x-2}\right]dx,$$

ou encore

$$\frac{dy}{y} = \frac{x^2+4}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx.$$

D'où

$$dy = \frac{x^2+4}{(x-1)\,(x-2)\,(x-3)} \times \frac{(x-1)^{\frac{5}{2}}\,(x-3)^{\frac{13}{2}}}{(x-2)^8}\,dx$$

$$= \frac{(x^2+4)\,(x-1)^{\frac{3}{2}}\,(x-3)^{\frac{11}{2}}}{(x-2)^9}\,dx.$$

Il est souvent avantageux d'opérer, comme dans cet exemple, quand la fonction est un produit de facteurs élevés à des puissances.

Exercices.

1. $y = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} + \cdots$

$$\frac{dy}{dx} = e^x.$$

2. $y = 35\,(a-bx)^{\frac{12}{5}} - 60\,a\,(a-bx)^{\frac{7}{5}}.$

$$\frac{dy}{dx} = 84\,b^2x\,(a-bx)^{\frac{2}{5}}.$$

3. $y = \left(ax^{\frac{3}{2}} + bx^{\frac{4}{3}} + cx^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3}{2}\,ax^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}\,bx^{\frac{1}{3}} + \frac{5}{4}\,cx^{\frac{1}{4}}}{2\left(ax^{\frac{3}{2}} + bx^{\frac{4}{3}} + cx^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

4. $y = \log \sec x.$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} x.$$

5. $y = (\text{arc sin vers } x)^2.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \text{ arc sin vers } x}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

6. $y = \log \sin^n x.$

$$\frac{dy}{dx} = n \cot g\, x.$$

7. $y = \operatorname{tang} x + \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3 x.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^4 x}.$$

8. $y = \log (a + bx^n)^2 (a' + b'x^m)^2.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2nb\,x^{n-1}}{a + bx^n} + \frac{2mb'\,x^{m-1}}{a' + b'x^m}.$$

9. $y = (3x + 2)\ (x - 1)^{\frac{3}{2}}.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{15}{2}\,x\,(x - 1)^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

10. $y = \operatorname{arc\,tang} \frac{x\sqrt{3}}{x + 2}.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{3}}{2\,(x^2 + x + 1)}.$$

11. $y = \frac{a^x\,(x \log a - 1)}{\log^2 a}.$

$$\frac{dy}{dx} = xa^x.$$

12. $y = \log . \log (1 + x^2).$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{(1 + x^2) \log (1 + x^2)}.$$

13. $y = 2e^{\sqrt{x}} \left(x^{\frac{3}{2}} - 3x + 6x^{\frac{1}{2}} - 6\right).$

$$\frac{dy}{dx} = xe^{\sqrt{x}}.$$

14. $y = \operatorname{arc\,cos} \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1 + x^2}.$$

15. $y = x^{\operatorname{arc\,sec} x}.$

$$\frac{dy}{dx} = x^{\operatorname{arc\,sec} x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\log x + \operatorname{arc\,sin} x\right)\frac{1}{x}.$$

16. $y = \dfrac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2 + b^2}$.

$$\frac{dy}{dx} = e^{ax}\cos bx.$$

17. $y = \log\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(1 + x^2)}.$$

18. $y = x(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 + x^2}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^4 - a^2x^2 - 4x^4}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

19. $y = \dfrac{b - 2cx}{\sqrt{a + bx - cx^2}}$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 + 4ac}{2(a + bx - cx^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

20. $y = \text{arc sec}\,\dfrac{x\sqrt{5}}{2\sqrt{x^2 + x - 1}}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 + x - 1}}.$$

21. $y = e^{(1 + x^2)\,\text{arc tang}\,x}$.

$$\frac{dy}{dx} = e^{(1 + x^2)\,\text{arc tang}\,x}\,(1 + 2x\,\text{arc tang}\,x).$$

22. $y = \log(x - a) - \dfrac{a(2x - a)}{(x - a)^2}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + a^2}{(x - a)^3}.$$

23. $y = \dfrac{\sin x}{1 + \text{tang}\,x}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{(\sin x + \cos x)^2}.$$

24. $y = 5\,(x+1)^{\frac{6}{5}}\,(176\,x^3 - 165\,x^2 + 150\,x - 125).$

$$\frac{dy}{dx} = 3696\,x^3\,(x+1)^{\frac{1}{5}}.$$

25. $y = \text{arc tang} \,.\, \text{arc sin}\,\dfrac{x}{a}.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}\left[1 + \left(\text{arc sin}\,\frac{x}{a}\right)^2\right]}.$$

26. $y = \dfrac{\sin(a-b+c)\,x}{a-b+c} + \dfrac{\sin(a+b-c)\,x}{a+b-c}$

$$- \frac{\sin(a-b-c)\,x}{a-b-c} - \frac{\sin(a+b+c)\,x}{a+b+c}.$$

$$\frac{dy}{dx} = 4\cos ax \sin bx \sin cx.$$

27. $y = \left(\dfrac{2}{\cos^4 x} + \dfrac{3}{\cos^2 x}\right)\sin x.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8}{\cos^5 x} - \frac{3}{\cos x}.$$

28. $y = \dfrac{(x-1)^{\frac{1}{2}}}{(x-2)^{\frac{1}{3}}}.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-4}{6\,(x-1)^{\frac{1}{2}}\,(x-2)^{\frac{4}{3}}}.$$

29. $y = a^{x^n}.$

$$\frac{dy}{dx} = n a^{x^n}\,x^{n-1}\log a.$$

30. $y = \dfrac{2\,\text{arc sin}\,x}{\sqrt{1-x^2}} + \log\dfrac{1-x}{1+x}.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x\,\text{arc sin}\,x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

31. $y = \text{arc tang}.\text{tang}\,\dfrac{x-1}{x+1}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

32. $y = \dfrac{2}{\sin^2 x \cos x} - \dfrac{3\cos x}{\sin^2 x} + 3 \log \text{tang}\,\dfrac{x}{2}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sin^3 x \cos^2 x}.$$

33. $y = e^x \sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x(x^4+2)}{(x^2-x+1)\sqrt{x^4+x^2+1}}.$$

34. $y = \text{arc tang}\,\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}\sin x}{b + a\cos x}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a + b\cos x}.$$

35. $y = \log \dfrac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a-bx}}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x\sqrt{a^2 - b^2x^2}}.$$

36. $y = (\log x - 1)\sqrt{a^2+x^2} - \dfrac{a}{2}\log\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{\sqrt{a^2+x^2}+a}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\log x}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

37. $y = \log(3x-8)^{\frac{1}{81}} - \dfrac{\dfrac{8}{3}x^2 - \dfrac{59}{6}x + \dfrac{2744}{243}}{(3x-8)^3}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3+5x+4}{(3x-8)^4}.$$

38. $y = \log\left[(x-3)^2+4\right]\left[(x-4)^2+9\right]^2$

$$+\frac{9}{2}\,\text{arc tang}\,\frac{x-3}{2}+7\,\text{arc tang}\,\frac{x-4}{3}.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2(3x^3-16x^2+24x+70)}{x^4-14x^3+86x^2-254x+325}.$$

39. $y=\sqrt{\dfrac{x\sqrt{ab-cd}+\sqrt{bc+abx^2}}{x\sqrt{ab-cd}-\sqrt{bc+abx^2}}}.$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{ab^2-bcd}}{(b+dx^2)\sqrt{c+ax^2}}.$$

40. $y=\dfrac{\sin^5 x\cos^3 x}{8}-\dfrac{\sin^3 x\cos^3 x}{16}+\dfrac{3\sin^3 x\cos x}{64}$

$$-\frac{3\sin x\cos x}{128}+\frac{3x}{128}.$$

$$\frac{dy}{dx}=\sin^4 x\cos^4 x.$$

CHAPITRE II.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS EXPLICITES DE PLUSIEURS VARIABLES.

La différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables est égale à la somme des différentielles partielles de cette fonction.

Soit
$$u=\mathrm{F}(x,y,z,\ldots..)$$
une fonction explicite u des variables x, y, z......

On a

$$du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz+\text{etc.}$$

Exemple.

Soit

$$u = \frac{x^2y + y^2z + z^2x}{x + y + z}.$$

La dérivée partielle de u par rapport à x, c'est-à-dire en considérant y et z comme des constantes et x comme seule variable, est

$$\frac{du}{dx} = \frac{(x+y+z)(2xy+z^2) - (x^2y + y^2z + z^2x)}{(x+y+z)^2},$$

ou, après simplification,

$$\frac{du}{dx} = \frac{(y+z)(z^2+2xy) + y(x^2 - yz)}{(x+y+z)^2}.$$

De même, la dérivée partielle de u par rapport à y considérée comme seule variable est, après réduction,

$$\frac{du}{dy} = \frac{(z+x)(x^2+2yz) + z(y^2 - xz)}{(x+y+z)^2}$$

et la dérivée de u par rapport à z,

$$\frac{du}{dz} = \frac{(x+y)(y^2+2xz) + x(z^2 - xy)}{(x+y+z)^2}.$$

Du reste, ces deux dernières dérivées auraient pu se tirer de la première par symétrie, la fonction proposée étant elle-même symétrique par rapport à x, y et z.

La différentielle totale est donc

$$du = \frac{(y+z)(z^2+2xy) + y(x^2-yz)}{(x+y+z)^2}\,dx$$
$$+ \frac{(z+x)(x^2+2yz) + z(y^2-xz)}{(x+y+z)^2}\,dy$$
$$+ \frac{(x+y)(y^2+2xz) + x(z^2-xy)}{(x+y+z)^2}\,dz.$$

En remplaçant dx, dy et dz respectivement par x, y et z, le second membre de cette égalité devient $2u$, d'après ce théorème d'Euler : Si u est une fonction homogène et du n[ème] degré des variables x, y, z, etc., on a

$$\frac{du}{dx}x + \frac{du}{dy}y + \frac{du}{dz}z + \cdots\cdots = nu.$$

Exercices.

1. $u = xye^{x+2y}$.

$$du = e^{x+2y}\left[y(1+x)\,dx + x(1+2y)\,dy\right].$$

2. $u = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}$.

$$du = -\frac{4(xdx + ydy)}{(x^2+y^2)^3};$$

pour $dx = x$, et $dy = y$, le second membre devient $-4u$.

3. $u = \dfrac{(x+a)^n}{(y+b)^m}$.

$$du = \frac{(x+a)^{n-1}\left[n(y+b)\,dx - m(x+a)\,dy\right]}{(y+b)^{m+1}}.$$

4. $u = \sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$.

$$du = \frac{2xy\,(ydx - xdy)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2-y^2}};$$

pour $dx = x$, $dy = y$, le second membre devient 0.

5. $u = \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}$.

$$du = \frac{(y - x - 2\sqrt{xy})\sqrt{y}\,dx + (x - y - 2\sqrt{xy})\sqrt{x}\,dy}{2\sqrt{xy}\,(x+y)^2};$$

pour $dx = x$, $dy = y$, le second membre devient

$$-\frac{1}{2}u.$$

6. $u = \log y^x$.

$$du = \log y . dx + \frac{x}{y} dy.$$

7. $u = \log \sin \frac{x}{y}$.

$$du = \frac{1}{y^2} (ydx - xdy) \cotg \frac{x}{y}.$$

8. $u = \log \sqrt{\frac{ax + by}{ax - by}}$.

$$du = \frac{ab (xdy - ydx)}{a^2 x^2 - b^2 y^2}.$$

9. $u = \text{arc tang} \frac{x - y}{x + y}$.

$$du = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}.$$

10. $u = \frac{x^2 y}{a^2 - z^2}$.

$$du = \frac{2xy}{a^2 - z^2} dx + \frac{x^2}{a^2 - z^2} dy + \frac{2x^2 yz}{(a^2 - z^2)^2} dz.$$

11. $u = \frac{m \sin y - n \sin z}{p \sin z - m \sin x}$.

$$du = \frac{m \cos x (m \sin y - n \sin z) dx + m \cos y (p \sin z - m \sin x) dy + m \cos z (n \sin x - p \sin y) dz}{(p \sin z - m \sin x)^2}.$$

12. $u = \text{arc sec} \frac{xy}{z}$.

$$du = \frac{yz\, dx + zx\, dy - xy\, dz}{xy \sqrt{x^2 y^2 - z^2}}.$$

13. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \text{arc tang} \frac{x}{z} + \frac{z^2}{2}$.

$$du = \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{zdx - xdz}{z^2 + x^2} + zdz.$$

14. $u = \log \frac{y + \sqrt{x^2 - z^2}}{y - \sqrt{x^2 - z^2}}$.

$$du = \frac{x(y-x) - z(y-z)}{\sqrt{x^2 - z^2}(y^2 - x^2 + z^2)}.$$

15. $u = \frac{xyzt}{x+y+z+t}$.

$$du = \frac{(y+z+t)\,yzt\,dx + (z+t+x)\,ztx\,dy + (t+x+y)\,txy\,dz + (x+y+z)\,xyz\,dt}{(x+y+z+t)^2};$$

pour $dx = x$, $dy = y$, $dz = z$, $dt = t$, le second membre devient $3u$.

CHAPITRE III.

DÉRIVÉES SUCCESSIVES DES FONCTIONS EXPLICITES D'UNE SEULE VARIABLE.

Le résultat de la dérivation, par les procédés ordinaires, de la dérivée du premier ordre d'une fonction de x est la dérivée du deuxième ordre de la fonction.

La dérivée du troisième ordre de la fonction est de même le résultat de la dérivation, par les moyens connus, de la dérivée du deuxième ordre, et ainsi de suite.

Quand la fonction proposée est décomposable en deux facteurs, dont chacun est une fonction plus simple de x, on peut pour obtenir la dérivée de l'ordre n[ème] de la fonction primitive, faire usage de ce théorème de Leibnitz : u et v étant des fonctions de x,

$$\frac{d^n uv}{dx^n} = v\frac{d^n u}{dx^n} + \frac{n}{1}\cdot\frac{dv}{dx}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^2 v}{dx^2}\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \text{etc.}$$

Enfin, quand la fonction est de la forme

$$(a + bx + cx^2)^m,$$

on pourrait, pour obtenir la dérivée du n[ème] ordre, décomposer le trinôme $a + bx + cx^2$ en deux facteurs du premier degré et appliquer la formule de Leibnitz, mais il est plus simple de faire usage de deux théorèmes présentés par Lagrange (*Mémoires de Berlin*, 1772) et qui peuvent s'énoncer comme suit :

1° Soit $\qquad y = (a + bx + cx^2)^m.$

En représentant par u le trinôme $a + bx + cx^2$ et par u' sa dérivée $b + 2cx$, on a

$$\frac{d^n u^m}{dx^n} = m(m-1)\dots(m-n+1)\,u^{m-n}u'^n\left[1 + \frac{n(n-1)}{1.(m-n+1)}\frac{cu}{u'^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2(m-n+1)(m-n+2)}\frac{c^2u^2}{u'^4} + \text{etc.}\right]\dots\dots(\alpha).$$

2° u et u' représentant le trinôme $a + bx + cx^2$ et sa dérivée, si l'on pose $4ac - b^2 = e^2$, on obtient

$$\frac{d^n u^m}{dx^n} = 2m(2m-1)\dots(2m-n+1)\left(\frac{u'}{2}\right)^n u^{m-n}\left[1 + \frac{m}{1}\frac{n(n-1)}{2m(2m-1)}\frac{e^2}{u'^2} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)}\frac{e^4}{u'^4} + \text{etc.}\right] \quad (\beta)\cdot$$

Des procédés particuliers permettent quelquefois de ramener la recherche de la dérivée n[ème] d'une fonction à l'une des méthodes précédentes appliquées dans les exemples suivants.

Exemple I.

Soit à chercher les dérivées successives de la fonction

$$y = \frac{a+x}{a-x}\cdot$$

La dérivée du premier ordre est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{(a-x)^2}.$$

Dérivant, d'après la règle ordinaire,

$$\frac{2a}{(a-x)^2},$$

expression de la dérivée du premier ordre, on obtient pour la dérivée du deuxième ordre de y

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2.2.a}{(a-x)^3}.$$

Dérivant $\dfrac{2.2.a}{(a-x)^3}$,

expression de la dérivée du deuxième ordre, on trouve pour dérivée du troisième ordre de y

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2.2.3.a}{(a-x)^4},$$

et ainsi de suite.

La dérivée du n^{ème} ordre de y est donc

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{2.2.3.4\ldots\ldots n.a}{(a-x)^{n+1}}.$$

Exemple II.

Soit à chercher les dérivées successives de la fonction

$$y = \frac{(a+bx)^m}{(a'+b'x)^p}.$$

Cette fonction est décomposable dans les deux facteurs

$$(a+bx)^m \text{ et } \frac{1}{(a'+b'x)^p} \text{ ou } (a'+b'x)^{-p};$$

on peut donc trouver sa dérivée n^{ème} par la formule de Leibnitz.

En posant
$$u=(a+bx)^m,$$
$$v=(a'+b'x)^{-p},$$

on trouve par dérivations successives

$$\frac{du}{dx}=mb(a+bx)^{m-1},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=m(m-1)b^2(a+bx)^{m-2},$$

$$\frac{d^3u}{dx^3}=m(m-1)(m-2)b^3(a+bx)^{m-3},$$

. . . .

$$\frac{d^nu}{dx^n}=m(m-1)\ldots(m-n+1)b^n(a+bx)^{m-n},$$

Et aussi

$$\frac{dv}{dx}=-pb'(a'+b'x)^{-p-1},$$

$$\frac{d^2v}{dx^2}=p(p+1)b'^2(a'+b'x)^{-p-2},$$

$$\frac{d^3v}{dx^3}=-p(p+1)(p+2)b'^3(a'+b'x)^{-p-3},$$

. . . .

$$\frac{d^nv}{dx^n}=(-1)^np(p+1)\ldots\ldots(p+n-1)b'^n(a'+b'x)^{-p-n}.$$

Substituant les valeurs de u, de v et de leurs dérivées dans la formule de Leibnitz, on obtient

$$\frac{d^nuv}{dx^n}\text{ ou }\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{1}{(a'+b'x)^p}\left[m(m-1)\ldots(m-n+1)b^n(a+bx)^{m-n}\right]$$
$$-\frac{n}{1}\frac{pb'}{(a'+b'x)^{p+1}}\left[m(m-1)\ldots(m-n+2)b^{n-1}(a+bx)^{m-n+1}\right]$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{p(p+1)b'^2}{(a'+b'x)^{p+2}}\left[m(m-1)\ldots(m-n+3)b^{n-2}(a+bx)^{m-n+2}\right]-\text{etc.}$$

ou en posant

$$A = m(m-1)\ldots(m-n+1)b^n \frac{(a+bx)^{m-n}}{(a'+b'x)^p},$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = A - \frac{n}{1}\frac{pb'}{a'+b'x} \cdot \frac{A(a+bx)}{b(m-n+1)}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{p(p+1)b'^2}{(a'+b'x)^2} \cdot \frac{A(a+bx)^2}{b^2(m-n+1)(m-n+2)} - \text{etc.}$$

ou

$$\frac{d^n y}{dx^n} = A\left[1 - \frac{n}{1}\frac{pb'}{b(m-n+1)}\frac{a+bx}{a'+b'x}\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{p(p+1)b'^2}{b^2(m-n+1)(m-n+2)} \cdot \left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^2 - \text{etc.}\right].$$

Pour obtenir les dérivées du premier ordre, du deuxième, du troisième, etc., il suffira de faire dans cette formule

$$n = 1, 2, 3, \text{ etc.}$$

Exemple III.

Soit à chercher la dérivée $n^{\text{ème}}$ de

$$y = \frac{1}{(ax+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

Cette fonction peut s'écrire

$$y = (ax+x^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Elle est donc de la forme

$$(a+bx+cx^2)^m$$

et l'on peut en trouver la dérivée $n^{\text{ème}}$ au moyen de la formule (β), par exemple. Ici

$$u = ax + x^2,\ u' = a + 2x \text{ et } e^2 = -a^2.$$

Substituant dans (β) ces valeurs et celle de

$$m = -\frac{3}{2}$$

on a

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(-1)^n 3.4\ldots.(n+2)(a+2x)^n}{2^n (ax+x^2)^{n+\frac{3}{2}}}\left[1 + \frac{3}{2}\frac{n(n-1)}{3.4}\left(\frac{a}{a+2x}\right)^2 \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3.4.5.6}\left(\frac{a}{a+2x}\right)^4 + \text{etc.}\right].$$

Exemple IV.

Soit
$$y = \frac{1}{a^2 - b^2 x^2}.$$

Cette fonction peut s'écrire

$$y = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a-bx} + \frac{1}{a+bx}\right).$$

Ainsi décomposée, on en obtient facilement les dérivées successives

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2a}\left[\frac{1}{(a-bx)^2} - \frac{1}{(a+bx)^2}\right],$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1.2.b^2}{2a}\left[\frac{1}{(a-bx)^3} + \frac{1}{(a+bx)^3}\right],$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1.2.3.b^3}{2a}\left[\frac{1}{(a-bx)^4} - \frac{1}{(a+bx)^4}\right],$$

. . . .

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2.3\ldots nb^n}{2a}\left[\frac{1}{(a-bx)^{n+1}} - (-1)^{n+1}\frac{1}{(a+bx)^{n+1}}\right].$$

Si n est pair, on a

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2.3\ldots nb^n}{2a(a^2-b^2x^2)^{n+1}}\left[(a+bx)^{n+1} + (a-bx)^{n+1}\right].$$

Si n est impair,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2.3\ldots nb^n}{2a(a^2-b^2x^2)^{n+1}}\left[(a+bx)^{n+1} - (a-bx)^{n+1}\right].$$

Exercices.

1. $y = x^m$.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}.$$

Si $n = m$,

$$\frac{d^m y}{dx^m} = 1.2.3\ldots m.$$

La dérivée de l'ordre m^{ème} est donc constante et les dérivées d'ordre supérieur nulles.

2. $y = \operatorname{Log} x$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{Log} e}{x}.$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^{n-1}.x^{-1}\operatorname{Log} e}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1}\frac{1.2.3\ldots.(n-1)\operatorname{Log} e}{x^n};$$
$$n = 2, 3, 4, 5\ldots$$

En faisant $n = 1$, on trouverait

$$\frac{dy}{dx} = o,$$

résultat inexact puisque

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{Log} e}{x};$$

mais à part cette première dérivée de $\operatorname{Log} x$, toutes les autres sont contenues dans l'expression générale de la dérivée n^{ème}.

S'il s'agit de logarithmes népériens, $\log e = 1$ et la dérivée n^{ème} de $y = \log x$ est

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^{n-1}x^{-1}}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1}\frac{1.2.3\ldots.(n-1)}{x^n}.$$

3. $y = a^{mx}$.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (m\log a)^n a^{mx}.$$

Si $m = 1$, $y = a^x$ et la dérivée n[ème] devient

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (\log a)^m a^x.$$

Si, en outre, $a = e$, $y = e^x$; et la dérivée n[ème] est

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^x.$$

4. $y = \sin mx$.

$$\frac{dy}{dx} = m \cos mx = m \sin\left(mx + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = m^2 \cos\left(mx + \frac{\pi}{2}\right) = m^2 \sin\left(mx + 2\,\frac{\pi}{2}\right),$$

. . . .

$$\frac{d^n y}{dx^n} = m^n \sin\left(mx + n\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Si $m = 1$, $y = \sin x$ et la dérivée n[ème] de cette fonction est

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right).$$

5. $y = \cos mx$.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = m^n \cos\left(mx + n\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Si $m = 1$, $y = \cos x$ et la dérivée n[ème] est

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right).$$

6. $y = e^{x \sin \alpha} \sin (x \cos \alpha)$.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{x \sin \alpha} \sin\left(x \cos \alpha - n\alpha + \frac{n\pi}{2}\right).$$

7. $y = e^{ax} \sin mx$.

$$\frac{dy}{dx} = e^{ax}(a \sin mx + m \cos mx) = e^{ax}.a\left(\sin mx + \frac{m}{a} \cos mx\right).$$

Posant

$$\frac{m}{a} = \text{tang}\,\varphi, \text{ d'où } a = (a^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi,$$

il vient

$$\frac{dy}{dx} = (a^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} e^{ax} \sin(mx + \varphi).$$

En employant le même procédé dans les dérivées suivantes, on arrive à

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (a^2 + m^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \sin(mx + n\varphi).$$

8. $y = (1 - x^2)^m$.

On peut écrire

$$y = (1 + x)^m (1 - x)^m,$$

et, en appliquant le théorème de Leibnitz,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(1 - x^2)^m}{(1 + x)^n} m(m-1)\ldots(m-n+1)\left[1 - \frac{n}{1}\frac{m}{m-n+1}\frac{1+x}{1-x}\right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{m(m-1)}{(m-n+1)(m-n+2)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 - \text{etc.}\right].$$

En faisant $n = m$,

$$\frac{d^m y}{dx^m} = 1.2.3\ldots.m(1-x)^m\left[1 - m^2\frac{1+x}{1-x}\right.$$
$$\left. + \frac{m^2(m-1)^2}{1^2.2^2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 - \text{etc.}\right].$$

9. $y = (a + bx)^m \log(a + bx)$.

Le théorème de Leibnitz fournit

$$\frac{d^n y}{dx^n} = m(m-1)\ldots(m-n+1)\, b^n (a+bx)^{m-n}\left[\log(a+bx)\right.$$
$$+ \frac{n}{1}\frac{1}{m-n+1} - \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{(m-n+1)(m-n+2)}$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{1.2}{(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)} - \text{etc.}\right].$$

Si $n = m$,

$$\frac{d^m y}{dx^m} = 1.2.3...mb^m\left[\log(a+bx) + \frac{m}{1^2} - \frac{m(m-1)}{(1.2)^2} + \frac{m(m-1)(m-2)\,1.2}{(1.2.3)^2} - \text{etc.}\right].$$

10. $y = (a - bx)^m \sin(a + bx)$.

Le théorème de Leibnitz donne

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^m m(m-1)....(m-n+1)\,b^n(a-bx)^{m-n}\left[\sin(a+bx) - \frac{n}{1}\cdot\frac{a-bx}{m-n+1}\sin\left(a+bx+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(a-bx)^2}{(m-n+1)(m-n+2)}\sin\left(a+bx+\frac{2\pi}{2}\right) - \text{etc.}\right].$$

Si $n = m$ et $b = 1$, la dérivée $m^{\text{ème}}$ de

$$y = (a - x)^m \sin(a + x)$$

est

$$\frac{d^m y}{dx^m} = (-1)^m 1.2.3....m\left[\sin(a+x) - \frac{m}{1^2}(a-x)\sin\left(a+x+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{m(m-1)}{(1.2)^2}(a-x)^2\sin\left(a+x+\frac{2\pi}{2}\right) - \text{etc.}\right].$$

11. $y = x^m e^{ax} \sin mx$.

Posant $e^{ax}\sin mx = u$, $x^m = v$ et sachant (*Exercice* 7) que

$$\frac{d^n u}{dx^n} = (a^2 + m^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \sin(mx + n\varphi),$$

on trouve facilement par le théorème de Leibnitz

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (a^2+m^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\left\{x^m \sin(mx+n\varphi) + \frac{n}{1}mx^{m-1}\frac{\sin[mx+(n-1)\varphi]}{(a^2+m^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{n(n-1)}{1.2}m(m-1)x^{m-2}\frac{\sin[mx+(n-2)\varphi]}{(a^2+m^2)^{\frac{2}{2}}} + \text{etc.}\right\}.$$

12. $y = e^{ax} X$,

X représentant une fonction de x.

Posant $u = X$ et $v = e^{ax}$, le théorème de Leibnitz fournit facilement

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{ax}\left(\frac{d^n X}{dx^n} + n.a\frac{d^{n-1}X}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}a^2\frac{d^{n-2}X}{dx^{n-2}} + \text{etc.}\right),$$

résultat qu'on peut écrire symboliquement

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{ax}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^n + na\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}a^2\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-2} + \text{etc.}\right]X$$

ou bien

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{ax}\left(\frac{d}{dx} + a\right)^n X.$$

D'où il suit que

$$\left(\frac{d}{dx} + a\right)^n X = e^{-ax}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{ax}X).$$

Ce résultat est d'une grande importance dans la solution des équations différentielles.

13. $y = \text{arc}\sin x.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

En employant la formule (β), on trouve

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^{n-1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}}$$

$$= \frac{1.2.3\ldots(n-1)\,x^{n-1}}{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\frac{1}{x^2}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4}\frac{1}{x^4} + \text{etc.}\right].$$

$$n = 2, 3, 4, 5\ldots\ldots$$

Ce résultat, pris négativement, serait l'expression de la dérivée n[ème] de arc cos x.

14. $y = \text{arc tang}\,\frac{x}{a}\cdot$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{a^2 + x^2} = a\,(a^2 + x^2)^{-1}.$$

La formule (β) donne

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^{n-1}(a^2+x^2)^{-1}}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1}1.2.3\ldots.na\,\frac{x^{n-1}}{(a^2+x^2)^n}\left[1 - \frac{(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{a^2}{x^2}\right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}\frac{a^4}{x^4} - \text{etc.}\right]\cdot$$

Ce résultat, pris négativement, serait l'expression de la dérivée $n^{\text{ème}}$ de arc cotg $\frac{x}{a}\cdot$

15. $y = \log\left(\frac{b}{2} + x + \sqrt{a + bx + x^2}\right)\cdot$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a + bx + x^2}} = (a + bx + x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

En faisant usage de la formule (β), on obtient

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^{n-1}(a + bx + x^2)^{-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}}$$
$$= (-1)^{n-1}1.2.3\ldots(n-1)\,\frac{(b+2x)^{n-1}}{2^{n-1}(a+bx+x^2)^{n-\frac{1}{2}}}\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\,\frac{4a-b^2}{(b+2x)^2}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\,\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4}\,\frac{(4a-b^2)^2}{(b+2x)^4} - \text{etc.}\right].$$

16. $y = \frac{1}{a^2 + x^2}\cdot$

On peut écrire

$$y = -\frac{1}{2a\sqrt{-1}}\left(\frac{1}{x + a\sqrt{-1}} - \frac{1}{x - a\sqrt{-1}}\right)\cdot$$

C'est la décomposition employée dans l'exemple IV; en dérivant on obtient

$$\frac{d^n y}{dx^n}=(-1)^{n+1}\frac{1.2.3\ldots n}{2a\sqrt{-1}}\left[\frac{(x-a\sqrt{-1})^{n+1}-(x+a\sqrt{-1})^{n+1}}{(x^2+a^2)^{n+1}}\right].$$

En posant

$$\varphi=\text{arc tang}\,\frac{a}{x},\text{d'où } x=\sqrt{a^2+x^2}\cos\varphi \text{ et } a=\sqrt{a^2+x^2}\sin\varphi,$$

on trouve

$$\frac{d^n y}{dx^n}=(-1)^n\frac{1.2.3\ldots n}{a}\frac{\sin(n+1)\varphi}{(a^2+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Liouville.

Puisque la dérivée première de

$$y \text{ arc tang}\,\frac{x}{a}$$

est

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{a^2+x^2},$$

d'où

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{d^{n-1}a(a^2+x^2)^{-1}}{dx^{n-1}},$$

on trouvera

$$\frac{d^n y}{dx^n}=(-1)^{n-1}1.2.3\ldots\ldots(n-1)\frac{\sin n\varphi}{(a^2+x^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

17. $y=\dfrac{x}{a^2+x^2}$.

En opérant comme dans l'exercice précédent, on trouve

$$\frac{d^n y}{dx^n}=(-1)^n\,1.2.3\ldots.n\frac{\cos(n+1)\varphi}{(a^2+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Liouville.

Les résultats de cet exercice et du précédent sont d'un usage fréquent dans la théorie des intégrales définies.

18. $y=\dfrac{1}{e^x+1}$.

En divisant 1 par $e^x + 1$, on trouve

$$y = e^{-x} - e^{-2x} + e^{-3x} - e^{-4x} + \text{etc.};$$

et facilement

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n \left[1^n e^{-x} - 2^n e^{-2x} + 3^n e^{-3x} - 4^n e^{-4x} + \text{etc.}\right].$$

Laplace a trouvé pour cette dérivée n^{ème} une autre forme (voir les *Mémoires de l'Académie*, 1777, page 108).

CHAPITRE IV.

DÉRIVÉES SUCCESSIVES DES FONCTIONS EXPLICITES DE PLUSIEURS VARIABLES.

Soit $$u = F(x, y)$$

une fonction u des variables x et y. Quel que soit l'ordre suivi dans les dérivations partielles

$$\frac{d^2 u}{dx\, dy} = \frac{d^2 u}{dy\, dx},$$

$$\frac{d^3 u}{dx^2 dy} = \frac{d^3 u}{dy\, dx^2} = \frac{d^3 u}{dx\, dy\, dx},$$

$$\frac{d^3 u}{dy^2 dx} = \frac{d^3 u}{dx\, dy^2} = \frac{d^3 u}{dy\, dx\, dy},$$

etc.

La différentielle totale de l'ordre n^{ème} de u est

$$d^n u = \frac{d^n u}{dx^n} dx^n + n \frac{d^n u}{dx^{n-1} dy} dx^{n-1} dy + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{d^n u}{dx^{n-2} dy^2} dx^{n-2} dy^2 + \text{etc.}$$

ou symboliquement

$$d^n u = \left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy\right)^n.$$

Soit encore $u = F(x, y, z)$

une fonction u des variables x, y, z.

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{d^2u}{dy\,dx}, \quad \frac{d^2u}{dy\,dz} = \frac{d^2u}{dz\,dy}, \quad \frac{d^2u}{dz\,dx} = \frac{d^2u}{dx\,dz},$$

$$\frac{d^3u}{dx^2\,dy} = \frac{d^3u}{dy\,dx^2} = \frac{d^3u}{dx\,dy\,dx},$$

$$\frac{d^3u}{dy^2\,dz} = \frac{d^3u}{dz\,dy^2} = \frac{d^3u}{dy\,dz\,dy},$$

$$\frac{d^3u}{dz^2\,dx} = \frac{d^3u}{dx\,dz^2} = \frac{d^3u}{dz\,dx\,dz},$$

$$\frac{d^3u}{dx\,dy\,dz} = \frac{d^3u}{dx\,dz\,dy} = \frac{d^3u}{dy\,dx\,dz} = \text{etc.}$$

Etc.,

quel que soit l'ordre suivi dans les dérivations.

On a aussi symboliquement

$$d^nu = \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz\right)^n.$$

Et ainsi de suite, quel que soit le nombre des variables que contienne une fonction.

Exemple I.

Soit $u = x^m y^p$.

On a $$\frac{du}{dx} = mx^{m-1}y^p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

$$\frac{du}{dy} = px^m y^{p-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

et si l'on dérive (1) par rapport à y, (2) par rapport à x,

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = mp\,x^{m-1}y^{p-1} = \frac{d^2u}{dy\,dx}.$$

Si l'on dérive (1) par rapport à x et le résultat par rapport à y, ce qui donne

$$\frac{d^2u}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}y^p,$$

$$\frac{d^3u}{dx^2dy} = mp(m-1)\,x^{m-2}\,y^{p-1},$$

on trouvera le même résultat qu'en dérivant deux fois de suite (2) par rapport à x, car

$$\frac{d^2u}{dydx} = mp\,x^{m-1}\,y^{p-1}$$

et

$$\frac{d^3u}{dy\,dx^2} = mp(m-1)\,x^{m-2}\,y^{p-1}.$$

Si l'on demandait les différentielles totales successives de la fonction proposée

$$u = x^m y^p,$$

on aurait, en considérant dx et dy comme constants :

$$du = mx^{m-1}y^p dx + px^m y^{p-1}dy,$$

$$d^2u = m(m-1)x^{m-2}y^p dx^2 + 2mp\,x^{m-1}y^{p-1}dxdy + p(p-1)x^m y^{p-2}dy^2,$$

$$d^3u = m(m-1)(m-2)x^{m-3}y^p dx^3 + 3mp(m-1)x^{m-2}y^{p-1}dx^2dy$$
$$+ 3mp(p-1)x^{m-1}y^{p-2}dxdy^2 + p(p-1)(p-2)x^m y^{p-3}dy^3,$$

etc.

Différentier ainsi par rapport à x et y est plus simple que de chercher les différentielles partielles de la fonction et d'en substituer les valeurs dans la formule donnée plus haut.

Exemple II.

Soit $$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

On a

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

En dérivant respectivement (1) et (2) par rapport à y et x; (2) et (3) par rapport à z et y; (1) et (3) par rapport à z et x, on trouve

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2u}{dy\,dx} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2u}{dy\,dz} = -\frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2u}{dz\,dy} = -\frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dz} = -\frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2u}{dz\,dx} = -\frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dérivant ces dérivées partielles du deuxième ordre, les deux premières par rapport à z, les deux suivantes par rapport à x et les deux dernières par rapport à y, on obtient

$$\frac{d^3u}{dx\,dy\,dz} = \frac{xyz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{d^3u}{dy\,dx\,dz} = \frac{d^3u}{dy\,dz\,dx}$$

$$= \frac{d^3u}{dz\,dy\,dx} = \frac{d^3u}{dx\,dz\,dy} = \frac{d^3u}{dz\,dx\,dy}.$$

Quant aux différentielles totales successives de la fonction proposée

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

on trouve

$$du = \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

puis en considérant dx, dy et dz comme constants,

$$d^2 u = \frac{(xdy - ydx)^2 + (zdx - xdz)^2 + (ydz - zdy)^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Etc.

Exercices.

1. $u = \sin x^{\sin y}$.

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \cos y \cos x \sin x^{\sin y - 1} (\sin y \,.\log \sin x + 1) = \frac{d^2 u}{dy\,dx}.$$

2. $u = \operatorname{tang} x^y$.

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{x^{y-1}(\cos x^y + y \log x \cos x^y + 2yx^y \log x \sin x^y)}{\cos^3 x^y} = \frac{d^2u}{dy\,dx}.$$

3. $u = e^{xy} \operatorname{arc\,tang}(x + y)$.

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \left\{ (1 + xy) \operatorname{arc\,tang}(x + y) + \frac{(x + y)\left[(x + y)^2 - 1\right]}{\left[1 + (x + y)^2\right]^2} \right\} e^{xy} = \frac{d^2u}{dy\,dx}.$$

4. $u = \dfrac{2xy}{x^3 - y^3}$.

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = -4 \cdot \frac{x^6 + 7x^3y^3 + y^6}{(x^3 - y^3)^3} = \frac{d^2u}{dy\,dx}.$$

5. $u = \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$.

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{2x^3 y}{(x^4 - y^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d^2u}{dy\,dx}.$$

6. $u = \dfrac{x + y}{\sin(x - y)}$.

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = -(x + y) \frac{\cos(x - y)}{\sin^3(x - y)} \left[1 + \cos(x - y)\right] = \frac{d^2u}{dy\,dx}.$$

7. $u = \sqrt{x^2 + y^2} + \text{arc tang}\,\dfrac{x}{y}\cdot$

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{x^2 - y^2 - xy\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^2} = \frac{d^2u}{dy\,dx}.$$

8. $u = \text{arc sin}\sqrt{\dfrac{x-y}{x}}.$

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{1}{4\sqrt{xy}}\,\frac{2x^2 - y^2}{\left[(x-y)(2x-y)\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{d^2u}{dy\,dx}.$$

9. $u = \cos\dfrac{x}{y}\,\text{arc cos}\,\dfrac{y}{x}\cdot$

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{1}{y^2}\,\text{arc cos}\,\frac{y}{x}\left(\sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\right)$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\left(\frac{2}{y}\sin\frac{x}{y} + \frac{x}{x^2-y^2}\cos\frac{x}{y}\right) = \frac{d^2u}{dy\,dx}.$$

10. $u = \log x - \dfrac{y^2}{2x^2} - \dfrac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} + \dfrac{1}{2}\log\left[\dfrac{y\sqrt{x^2+y^2}-y^2}{x}\right].$

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{2y}{x^3} + \frac{x^2+2y^2}{x^3\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{d^2u}{dy\,dx}.$$

11. $u = x^3 - 3axy + y^3.$

$$d^3u \quad = 12\,(dx^3 + dy^3).$$

12. $u = \sqrt{2xy + y^2}.$

$$\frac{d^3u}{dx^2dy} = \frac{y^2(y-x)}{(2xy+y^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

13. $u = x\,\text{tang}\,y + y\,\text{tang}\,x.$

$$\frac{d^4u}{dx^3dy} = \frac{2(\cos^2 x - 3\sin x)}{\cos^4 x}.$$

14. $u = \log\left[(x+y)^2(y+z)\right].$

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = -\frac{2}{(x+y)^2} = \frac{d^2u}{dy\,dx},$$

$$\frac{d^2u}{dy\,dz} = -\frac{1}{(y+z)^2} = \frac{d^2u}{dz\,dy},$$

$$\frac{d^2u}{dz\,dx} = 0 = \frac{d^2u}{dx\,dz}.$$

15. $u = \dfrac{xyz}{x^2 - z^2}$.

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = -\frac{z(x^2+z^2)}{(x^2-z^2)^2} = \frac{d^2u}{dy\,dx},$$

$$\frac{d^2u}{dy\,dz} = \frac{x(x^2+z^2)}{(x^2-z^2)^2} = \frac{d^2u}{dz\,dy},$$

$$\frac{d^2u}{dz\,dx} = -\frac{y(x^4+6x^2z^2+z^4)}{(x^2-z^2)^3} = \frac{d^2u}{dx\,dz}.$$

16. $u = \log x^{y^z}$.

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{zy^{z-1}}{x} = \frac{d^2u}{dy\,dx},$$

$$\frac{d^2u}{dy\,dz} = y^{z-1}\log x\,(1 + z\log y) = \frac{d^2u}{dz\,dy},$$

$$\frac{d^2u}{dz\,dx} = \frac{y^z \log y}{x} = \frac{d^2u}{dx\,dz}.$$

17. $u = x\log y + y\log z + z\log x$.

$$\frac{d^3u}{dx\,dy^2} = -\frac{1}{y^2} = \frac{d^3u}{dy^2\,dx} = \frac{d^3u}{dy\,dx\,dy},$$

$$\frac{d^3u}{dy\,dz^2} = -\frac{1}{z^2} = \frac{d^3u}{dz^2\,dy} = \frac{d^3u}{dz\,dy\,dz},$$

$$\frac{d^3u}{dz\,dx^2} = -\frac{1}{x^2} = \frac{d^3u}{dx^2\,dz} = \frac{d^3u}{dx\,dz\,dx}.$$

$$d^3u = -\left[2\left(\frac{zdx^3}{x^3} + \frac{xdy^3}{y^3} + \frac{ydz^3}{z^3}\right) + 3\left(\frac{dz\,dx^2}{x^2} + \frac{dx\,dy^2}{y^2} + \frac{dy\,dz^2}{z^2}\right)\right].$$

18. $u = e^{ax+by+cz}$.

$$d^n u = e^{ax+by+cz}(adx + bdy + cdz)^n.$$

19. $u = \log(ax + by + cz)$.

$$d^n u = (-1)^{n-1}\, 1.2.3\ldots(n-1)\left(\frac{adx + bdy + cdz}{ax + by + cz}\right)^n.$$

20. $u = \sin ax \sin by \sin cz$.

$$\begin{aligned} d^4 u = {} & \sin ax \sin by \sin cz\,(a^4dx^4 + 6a^2b^2dx^2dy^2 + 6a^2c^2dx^2dz^2 \\ & + b^4dy^4 + 6b^2c^2dy^2dz^2 + c^4dz^4) \\ & - \cos ax \cos by \sin cz\,(a^2dx^2 + 3c^2dz^2 + b^2dy^2)\,4ab\,dx\,dy \\ & - \cos ax \sin by \cos cz\,(a^2dx^2 + 3b^2dy^2 + c^2dz^2)\,4ac\,dx\,dz \\ & - \sin ax \cos by \cos cz\,(b^2dy^2 + 3a^2dx^2 + c^2dz^2)\,4bc\,dy\,dz. \end{aligned}$$

21. $u = \dfrac{x^2y^2}{z^2 + t^2}$.

$$\frac{d^8u}{dx^2dy^2dz^2dt^2} = \frac{32(38z^2t^2 - 5z^4 - 5t^4)}{(z^2 + t^2)^5} = \frac{d^8u}{dy^2dx^2dz^2dt^2} = \text{etc.}$$

CHAPITRE V.

DIFFÉRENTIATION DES ÉQUATIONS.

Premier cas.

Une seule des variables étant indépendante.

Soit
$$F(x, y) = o \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

une équation renfermant les variables x et y; x indépendante.

Une première différentiation donne

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = o \quad \ldots\ldots \quad (2);$$

équation d'où l'on tire facilement

1° la différentielle totale dy,

2° la dérivée $\frac{dy}{dx}$.

Une deuxième différentiation effectuée en considérant $\frac{dF}{dx}$ et $\frac{dF}{dy}$ comme des fonctions de x, y et dx comme constant, fournit

$$\frac{d^2F}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2F}{dy\,dx}dy\,dx + \frac{d^2F}{dy^2}dy^2 + \frac{dF}{dy}d^2y = o \quad (3);$$

équation d'où l'on tire

1° la différentielle totale d^2y,

2° la dérivée $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Pour trouver cette dernière dérivée, on divisera d'abord les deux membres de (3) par dx^2, puis on remplacera $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur trouvée au moyen de (2).

Une troisième différentiation fournirait

1° la différentielle totale d^3y,

2° la dérivée $\frac{d^3y}{dx^3}$;

et ainsi de suite.

Soient

$$F_1(x, y, z) = o,$$
$$F_2(x, y, z) = o,$$

deux équations renfermant les variables x, y, z, dont une seule x est indépendante.

Par une première différentiation, on trouve

$$\frac{dF_1}{dx}dx + \frac{dF_1}{dy}dy + \frac{dF_1}{dz}dz = o,$$

$$\frac{dF_2}{dx}dx + \frac{dF_2}{dy}dy + \frac{dF_2}{dz}dz = o,$$

et en éliminant tour à tour dz et dy entre ces équations, on obtient

1° les différentielles totales dy et dz,

2° les dérivées $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$.

Une deuxième différentiation effectuée en considérant

$$\frac{dF_1}{dx}, \frac{dF_1}{dy}, \frac{dF_1}{dz}, \frac{dF_2}{dx}, \frac{dF_2}{dy}, \frac{dF_2}{dz}$$

comme des fonctions de x, y, z et dx comme constant, donne

$$\frac{d^2F_1}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2F_1}{dx\,dy}dx\,dy + 2\frac{d^2F_1}{dx\,dz}dx\,dz + \frac{d^2F_1}{dy^2}dy^2$$
$$+ 2\frac{d^2F_1}{dy\,dz}dy\,dz + \frac{d^2F_1}{dz^2}dz^2 + \frac{dF_1}{dy}d^2y + \frac{dF_1}{dz}d^2z = o,$$

$$\frac{d^2F_2}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2F_2}{dx\,dy}dx\,dy + 2\frac{d^2F_2}{dx\,dz}dx\,dz + \frac{d^2F_2}{dy^2}dy^2$$
$$+ 2\frac{d^2F_2}{dy\,dz}dy\,dz + \frac{d^2F_2}{dz^2}dz^2 + \frac{dF_2}{dy}d^2y + \frac{dF_2}{dz}d^2z = o,$$

et en éliminant tour à tour d^2z et d^2y entre ces équations, on trouve

1° les différentielles totales d^2y et d^2z;

2° les dérivées $\frac{d^2y}{dx^2}$ et $\frac{d^2z}{dx^2}$.

Pour obtenir ces derniers coefficients différentiels, on

divisera d'abord les deux membres de chacune des équations précédentes par dx^2 et l'on remplacera $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ par leurs valeurs trouvées à la suite de la première différentiation.

En général, si l'on a m équations renfermant $m+1$ variables dont une seule est indépendante, même marche pour obtenir les différentielles totales et les dérivées des différents ordres.

Second cas.

Deux des variables étant indépendantes.

Soit
$$F(x, y, z) = o,$$
une équation renfermant les variables x, y, z, dont deux indépendantes x et y.

Une première différentiation donne

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = o;$$

équation d'où l'on tire aisément

1° la différentielle totale dz,

2° les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$.

Les dérivées partielles sont les coefficients de dx et de dy dans la différentielle totale.

Une deuxième différentiation effectuée en considérant $\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dz}$ comme des fonctions de x, y, z et dx, dy comme constants ferait connaître par son résultat

1° la différentielle totale d^2z,

2° les dérivées partielles $\frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx\,dy}, \frac{d^2z}{dy^2}$.

Etc.

Soient $F_1(x, y, z, u) = o,$
$F_2(x, y, z, u) = o,$

deux équations renfermant quatre variables x, y, z, u, dont deux indépendantes x et y.

Une première différentiation fournit

$$\frac{dF_1}{dx}dx + \frac{dF_1}{dy}dy + \frac{dF_1}{dz}dz + \frac{dF_1}{du}du = o,$$
$$\frac{dF_2}{dx}dx + \frac{dF_2}{dy}dy + \frac{dF_2}{dz}dz + \frac{dF_2}{du}du = o,$$

et, par élimination, on obtient facilement

1° les différentielles totales dz et du,

2° les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}$.

Les dérivées partielles sont les coefficients de dx et de dy dans les différentielles totales.

Une deuxième différentiation fournirait deux équations d'où l'on tirerait les différentielles totales et les dérivées partielles du deuxième ordre, etc.

Des deux cas précédents, on s'élève aisément aux cas où les équations renferment trois, quatre, etc. variables indépendantes.

Exemple I.

Soit l'équation $x^4 - 3x^2y^2 + y^4 = o$ . . . . . . (1).

Différentiant, on a

$$4x^3dx - 6xy^2dx - 6x^2y\,dy + 4y^3dy = o,$$

ou

$$2x^3dx - 3xy^2dx - 3x^2y\,dy + 2y^3dy = o \quad . \quad . \quad (2).$$

D'où $dy = \frac{3xy^2 - 2x^3}{2y^3 - 3x^2y}dx = \frac{x}{y}\cdot\frac{3y^2 - 2x^2}{2y^2 - 3x^2}dx$

et $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}\cdot\frac{3y^2 - 2x^2}{2y^2 - 3x^2}$.

Différentiant (2), en regardant dx comme constant, on obtient

$$6x^2dx^2 - 3y^2dx^2 - 12xy\,dx\,dy - 3x^2dy^2 - 3x^2y\,d^2y + 6y^2dy^2 + 2y^3d^2y = o,$$

ou, en divisant par dx^2,

$$6x^2 - 3y^2 - 12xy\frac{dy}{dx} - 3x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3x^2y\frac{d^2y}{dx^2} + 6y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y^3\frac{d^2y}{dx^2} = o,$$

ou plus simplement

$$6x^2 - 3y^2 - 12xy\frac{dy}{dx} + (6y^2 - 3x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (2y^3 - 3x^2y)\frac{d^2y}{dx^2} = o.$$

Substituant à $\frac{dy}{dx}$ sa valeur trouvée plus haut et réduisant, on tire de l'équation résultante

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6(2y^8 - 7x^2y^6 + 7x^4y^4 - 7x^6y^2 + 2x^8)}{y^3(2y^2 - 3x^2)^3}.$$

Exemple II.

Soient les équations

$$\cos x + \cos y + \cos z = a,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = b.$$

La différentiation donne

$$\left.\begin{aligned} \sin x dx + \sin y dy + \sin z dz = o, \\ x^2dx + y^2dy + z^2dz = o. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

L'élimination de dz entre ces équations fournit

$$(z^2\sin x - x^2\sin z)\,dx + (z^2\sin y - y^2\sin z)\,dy = o$$

et celle de dy

$$(x^2\sin y - y^2\sin x)\,dx + (z^2\sin y - y^2\sin z)\,dz = o.$$

D'où

$$dy = \frac{x^2\sin z - z^2\sin x}{z^2\sin y - y^2\sin z}dx, \qquad dz = \frac{y^2\sin x - x^2\sin y}{z^2\sin y - y^2\sin z}dx,$$

et $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 \sin z - z^2 \sin x}{z^2 \sin y - y^2 \sin z}$, $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{y^2 \sin x - x^2 \sin y}{z^2 \sin y - y^2 \sin z}$.

Différentiant les équations (1) en considérant dx comme constant, on a

$$\cos x\, dx^2 + \cos y\, dy^2 + \sin y\, d^2y + \cos z\, dz^2 + \sin z\, d^2z = o,$$
$$2x\, dx^2 + 2y\, dy^2 + y^2 d^2y + 2z\, dz^2 + z^2 d^2 z = o.$$

Et en divisant par dx^2,

$$\cos x + \cos y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin y \frac{d^2y}{dx^2} + \cos z \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \sin z \frac{d^2z}{dx^2} = o,$$
$$2x + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2z \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + z^2 \frac{d^2z}{dx^2} = o.$$

Remplaçant $\dfrac{dy}{dx}$ et $\dfrac{dz}{dx}$ par leurs valeurs, chassant les dénominateurs, puis posant :

$$z^2 \sin y - y^2 \sin z = \mathrm{A},$$
$$x^2 \sin z - z^2 \sin x = \mathrm{B},$$
$$y^2 \sin x - x^2 \sin y = \mathrm{C},$$

on trouve

$$\mathrm{A}^2 \cos x + \mathrm{B}^2 \cos y + \mathrm{C}^2 \cos z + \mathrm{A}^2 \sin y \frac{d^2y}{dx^2} + \mathrm{A}^2 \sin z \frac{d^2z}{dx^2} = o,$$
$$2\mathrm{A}^2 x + 2\mathrm{B}^2 y + 2\mathrm{C}^2 z + \mathrm{A}^2 y^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \mathrm{A}^2 z^2 \frac{d^2z}{dx^2} = o.$$

L'élimination 1° de $\dfrac{d^2z}{dx^2}$, 2° de $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ entre ces équations donne

$$\mathrm{A}^2(z^2 \cos x - 2x \sin z) + \mathrm{B}^2(z^2 \cos y - 2y \sin z)$$
$$+ \mathrm{C}^2(z^2 \cos z - 2z \sin z) + \mathrm{A}^4 \frac{d^2y}{dx^2} = o,$$
$$\mathrm{A}^2(2x \sin y - y^2 \cos x) + \mathrm{B}^2(2y \sin y - y^2 \cos y)$$
$$+ \mathrm{C}^2(2z \sin y - y^2 \cos z) + \mathrm{A}^4 \frac{d^2z}{dx^2} = o.$$

D'où l'on tire

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{A^2(2x\sin z-z^2\cos x)+B^2(2y\sin z-z^2\cos y)+C^2(2z\sin z-z^2\cos z)}{A^4},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{A^2(y^2\cos x-2x\sin y)+B^2(y^2\cos y-2y\sin y)+C^2(y^2\cos z-2z\sin y)}{A^4},$$

et, en multipliant par dx^2, les différentielles totales, d^2y et d^2z.

Exemple III.

Soit $$z^2=xe^y+e^z.$$

La différentiation donne

$$2zdz=e^ydx+xe^ydy+e^zdz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

D'où

$$dz=\frac{e^y}{2z-e^z}dx+\frac{xe^y}{2z-e^z}dy,$$

et, par suite,

$$\frac{dz}{dx}=\frac{e^y}{2z-e^z} \text{ et } \frac{dz}{dy}=\frac{xe^y}{2z-e^z}.$$

Différentiant l'équation (1), en considérant dx et dy comme constants, on a

$$2dz^2+2zd^2z=2e^ydxdy+e^ydy^2+e^zdz^2+e^zd^2z,$$

ou $$(2z-e^z)d^2z=e^ydy^2+2e^ydxdy+(e^z-2)dz^2.$$

Remplaçant dz par sa valeur,

$$(2z-e^z)d^2z=e^ydy^2+2e^ydxdy+(e^z-2)\left(\frac{e^y}{2z-e^z}dx+\frac{xe^y}{2z-e^z}dy\right)^2.$$

D'où l'on tire aisément

$$d^2z=e^{2y}\frac{e^z-2}{(2z-e^z)^3}dx^2+2e^y\frac{xe^y(e^z-2)+(2z-e^z)^2}{(2z-e^z)^3}dx\,dy$$
$$+e^y\frac{x^2e^y(e^z-2)+(2z-e^z)_2}{(2z-e^z)^3}dy^2,$$

et par conséquent

$$\frac{d^2z}{dx^2} = e^{2y}\frac{e^z - 2}{(2z - e^z)^3},$$

$$\frac{d^2z}{dxdy} = e^y\frac{xe^y(e^z - 2) + (2z - e^z)^2}{(2z - e^z)^3},$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = e^y\frac{x^2e^y(e^z - 2) + (2z - e^z)^2}{(2z - e^z)^3}.$$

Exemple IV.

Soient les équations

$$ax + by + cz + ku = l,$$

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + k^2u^2 = m.$$

Différentiant, on a

$$\left.\begin{array}{l} adx + bdy + cdz + kdu = o, \\ a^2xdx + b^2ydy + c^2zdz + k^2udu = o. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (1).$$

Entre ces équations éliminant du, on obtient

$$(aku - a^2x)\,dx + (bku - b^2y)\,dy + (cku - c^2z)\,dz = o.$$

D'où

$$dz = \frac{a^2x - aku}{cku - c^2z}\,dx + \frac{b^2y - bku}{cku - c^2z}\,dy,$$

et

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a(ax - ku)}{c(ku - cz)}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{b(by - ku)}{c(ku - cz)}.$$

Entre les équations (1) éliminant dz, il vient

$$(a^2x - acz)\,dx + (b^2y - bcz)\,dy + (k^2u - ckz)\,du = o.$$

D'où
$$du = \frac{acz - a^2x}{k^2u - ckz}\,dx + \frac{bcz - b^2y}{k^2u - ckz}\,dy,$$

et

$$\frac{du}{dx} = \frac{a(cz - ax)}{k(ku - cz)}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{b(cz - by)}{k(ku - cz)}.$$

Différentiant les équations (1), en considérant dx et dy comme constants, on a

$$cd^2z + kd^2u = o,$$

$$a^2dx^2 + b^2dy^2 + c^2dz^2 + k^2du^2 + c^2z\,d^2z + k^2u\,d^2u = o.$$

Éliminant entre ces équations, 1° d^2u, 2° d^2z, on obtient

$$c(ku-cz)\,d^2z = a^2dx^2 + b^2dy^2 + c^2dz^2 + k^2du^2,$$
$$k(cz-ku)\,d^2u = a^2dx^2 + b^2dy^2 + c^2dz^2 + k^2du^2.$$

Substituant à dz et à du leurs valeurs trouvées, on tire aisément des deux équations résultantes

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{a^2}{c}\,\frac{1+(ax-ku)^2+(cz-ax)^2}{(ku-cz)^3} = -\frac{d^2u}{dx^2},$$

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{ab}{c}\,\frac{(ax-ku)(by-ku)+(cz-ax)(cz-by)}{(ku-cz)^3} = -\frac{d^2u}{dx\,dy},$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{b^2}{c}\,\frac{1+(by-ku)^2+(cz-by)^2}{(ku-cz)^3} = -\frac{d^2u}{dy^2}.$$

Exercices.

1. $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = o.$

(Équation générale des lignes du second ordre.)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2Ax + By + D}{Bx + 2Cy + E}.$$

2. $y^4 + 2(x^2+c^2)y^2 + (x^2-c^2)^2 - a^4 = o.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}\cdot\frac{c^2-x^2-y^2}{c^2+x^2-y^2}.$$

3. $(x^2+y^2-bx)^2 - a^2(x^2+y^2) = o.$ (Limaçon de Pascal.)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\cdot\frac{a^2x-(x^2+y^2-bx)(2x-b)}{2(x^2+y^2-bx)-a^2}.$$

4. $(x^2+y^2-a^2)^2(x^2+y^2) = 4a^2(x^2+y^2-ax)^2.$

En représentant $x^2+y^2-a^2$ par A

et x^2+y^2-ax par B,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\cdot\frac{2Ax(x^2+y^2)+A^2x-4a^2B(2x-c)}{8a^2B-2A(x^2+y^2)-A^2}.$$

5. $x^2 \log y - y^2 \log x = o.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \cdot \frac{y^2 - 2x^2 \log y}{x^2 - 2y^2 \log x}.$$

6. $y^3 - x^3 - y \,.\, \text{arc sin}\, x = o.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2\sqrt{1-x^2} + y}{(3y^2 - \text{arc sin}\, x)\sqrt{1-x^2}}.$$

7. $y \sin x - x \,\text{arc tang}\, y = o.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+y^2)(\text{arc tang}\, y - y\cos x)}{(1+y^2)\sin x - x}.$$

8. $\text{tang}\,\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

9. $x = a \,.\, \text{arc sin}\, \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a} - \sqrt{2ay - y^2}.$ (Cycloïde.)

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a-y}{y}},\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2},\quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2a}{y^3}\sqrt{\frac{2a-y}{y}}.$$

10. $\text{tang}\,(x^2 + y^2) = x^2 - y^2.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot \frac{\cos^2(x^2+y^2) - 1}{\cos^2(x^2+y^2) + 1}.$$

11. $x = a \cos \frac{a-y}{b} - \sqrt{b^2 - (a-y)^2}.$ (Trochoïde.)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{b^2 - (a-y)^2}}{y}.$$

12. $yx^y = \text{arc sin}\, x.$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x-y}{x\,\text{arc sin}\, x\sqrt{1-x^2}}\right)\left(\frac{y}{1 + y\cos x}\right).$$

13. $\text{arc tang}\,\dfrac{x-a}{x+a} - \text{arc tang}\,\dfrac{y-a}{y+a} = b.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+a^2}{x^2+a^2}.$$

14. $y = x^{y+x}.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{y+x}\,(x^{y+x-1} + \log x + 1)}{1 - x^{y+x}\log x}.$$

15. $z^3 + 3zx^2 = axy.$

$$dz = \frac{ay - 6xz}{3(z^2+x^2)}\,dx + \frac{ax}{3(z^2+x^2)}\,dy.$$

16. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2).$

$$dz = \frac{1}{z}\cdot\frac{a^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2}{a^2 + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2}\,(xdx + ydy).$$

17. $\dfrac{(x-mz)^2}{a^2} + \dfrac{(y-nz)^2}{b^2} = 1.$ (Cylindre elliptique.)

$$dz = \frac{b^2(x-mz)}{mb^2(x-mz)+na^2(y-nz)}\,dx + \frac{a^2(y-nz)}{mb^2(x-mz)+na^2(y-nz)}\,dy.$$

18. $\dfrac{x}{y} = \text{tang}\left(\dfrac{2\pi}{h}z\right).$ (Héliçoïde gauche.)

En posant $$\frac{2\pi}{h} = a,$$

$$dz = \frac{\cos^2 az}{ay}\left(dx - \frac{x}{y}\,dy\right).$$

19. $(\mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 - 1)(\mathrm{A}a^2 + \mathrm{A}'b^2 + \mathrm{A}''c^2 - 1)$
$= (\mathrm{A}ax + \mathrm{A}'by + \mathrm{A}''cz - 1)^2.$

En faisant $\mathrm{A}a^2 + \mathrm{A}'b^2 + \mathrm{A}''c^2 - = \mathrm{K}$

et $\mathrm{A}ax + \mathrm{A}'by + \mathrm{A}''cz - 1 = \mathrm{P},$

$$dz = -\frac{\mathrm{A}\ (\mathrm{K}x - \mathrm{P}a)}{\mathrm{A}''(\mathrm{K}z - \mathrm{P}c)}\,dx - \frac{\mathrm{A}'\ (\mathrm{K}y - \mathrm{P}b)}{\mathrm{A}''(\mathrm{K}z - \mathrm{P}c)}\,dy.$$

20. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$ (Ellipsoïde.)

$$dz=-\frac{c^2x}{a^2z}dx-\frac{c^2y}{b^2z}dy,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{c^2(a^2z^2+c^2x^2)}{a^4z^3},$$

$$\frac{d^2z}{dx\,dy}=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3},$$

$$\frac{d^2z}{dy^2}=-\frac{a^2(b^2z^2+c^2y^2)}{b^4z^3}.$$

21. $\dfrac{y^2}{2p}-\dfrac{z^2}{2q}=x.$ (Paraboloïde hyperbolique.)

$$dz=\frac{qy}{pz}dy-\frac{q}{z}dx,$$

$$d^2z=-\frac{q^2}{z^3}dx^2+2\frac{q^2y}{pz^3}dx\,dy+\frac{q}{pz^3}(pz^2-qy^2)\,dy^2.$$

22. $ax^m+by^n+cz^p=k,$

$a'x^{m'}+b'y^{n'}+c'z^{p'}=k'.$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{map'c'x^{m-1}z^{p'-1}-m'a'pc\,x^{m'-1}z^{p-1}}{nbp'c'y^{n-1}z^{p'-1}-n'b'pc\,y^{n'-1}z^{p-1}},$$

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{man'b'x^{m-1}y^{n'-1}-m'a'nb\,x^{m'-1}y^{n-1}}{pcn'b'y^{n'-1}z^{p-1}-p'c'nb\,y^{n-1}z^{p'-1}}.$$

23. $\sin(x+y)+z=a,$

$\sin(x-y)+z=b.$

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tang}x\operatorname{tang}y,$$

$$\frac{dz}{dx}=\operatorname{tang}x\operatorname{tang}y.\sin x\sin y-\cos x\cos y.$$

24. $x+y+z+u=a,$

$x^2+y^2+z^2+u^2=b,$

$x^3+y^3+z^3+u^3=c.$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(u-x)(z-x)}{(u-y)(z-y)},$$

et, par symétrie,

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{(u-x)(y-x)}{(u-z)(y-z)},$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{(z-x)(y-x)}{(z-u)(y-u)}.$$

En faisant

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 = A,$$

$$2x + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2z\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + 2u\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = B,$$

on trouve encore

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{A(u+z) - B}{(u-y)(z-y)},$$

et, par symétrie,

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{A(u+y) - B}{(u-z)(y-z)},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{A(z+y) - B}{(z-u)(y-u)}.$$

25. $xy + zu = a,$

$$\frac{x+y}{z+u} = b.$$

$$dz = \frac{by+z}{b(z-u)}dx + \frac{bx+z}{b(z-u)}dy,$$

$$du = -\frac{by+u}{b(z-u)}dx + \frac{bx+u}{b(z-u)}dy,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{2(by+u)(by+z)}{b^2(z-u)^3} = -\frac{d^2u}{dx^2},$$

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{b^2(z-u)^2 - (bx+u)(by+z) - (by+u)(bx+z)}{b^2(z-u)^3} = -\frac{d^2u}{dx\,dy},$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = -\frac{2(bx+u)(bx+z)}{b^2(z-u)^3} = -\frac{d^2u}{dy^2}.$$

26. $x + y + z + u = a,$

$$\log xyzu = b.$$

$$dz = -\frac{z}{x}\frac{u-x}{u-z}dx - \frac{z}{y}\cdot\frac{u-y}{u-z}dy,$$

$$du = -\frac{u}{x}\frac{z-x}{z-u}dx - \frac{u}{y}\frac{z-y}{z-u}dy.$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{zu}{x^2(u-z)^3}\left[(u-z)^2 + (u-x)^2 + (z-x)^2\right] = -\frac{d^2u}{dx^2},$$

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{zu}{xy(u-z)^3}\left[(u-x)(u-y) + (z-x)(z-y)\right] = -\frac{d^2u}{dx\,dy},$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{zu}{y^2(u-z)^3}\left[(u-z)^2 + (u-y)^2 + (z-y)^2\right] = -\frac{d^2u}{dy^2}.$$

27. $\text{arc cotg}\,\dfrac{u+z-1}{u-z+1} = \text{arc cotg}\,\dfrac{y-x+1}{y+x-1} + k.$

$$du = \frac{y}{z-1}\cdot\frac{u^2+(z-1)^2}{y^2+(x-1)^2}dx - \frac{x-1}{z-1}\frac{u^2+(z-1)^2}{y^2+(x-1)^2}dy + \frac{u}{z-1}dz.$$

28. $x + y + z = \log(u + v),$

$x + y + u = \log(v + z),$

$x + y + v = \log(z + u).$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{(z+u)(z+v+1)(u+v+1) + (z-u)(z+u+1)}{(z+u+1)(u+v+1) - (z+v+1)\left[(z+u)(u+v)-1\right]} = \frac{dz}{dy},$$

et, par symétrie,

$$\frac{du}{dx} = \frac{(u+v)(u+z+1)(v+z+1) + (u-v)(u+v+1)}{(u+v+1)(v+z+1) - (u+z+1)\left[(u+v)(v+z)-1\right]} = \frac{du}{dy},$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{(v+z)(v+u+1)(z+u+1) + (v-z)(v+z+1)}{(v+z+1)(z+u+1) - (v+u+1)\left[(v+z)(z+u)-1\right]} = \frac{dv}{dy}.$$

CHAPITRE VI.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS.

SECTION I. — *Théorème de Taylor.*

Soit $y = F(x)$ une fonction y de la variable x.

En représentant par h un accroissement fini donné à x, l'expression du théorème de Taylor est

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}F'''(x) + \text{etc.}$$

Le $n^{ème}$ terme de la série est

$$\frac{h^{n-1}}{1.2.3...(n-1)} F^{n-1}(x),$$

et, si l'on s'arrête à ce terme, l'erreur commise en négligeant tous ceux qui le suivent est comprise entre la plus grande et la plus petite valeur de l'expression

$$\frac{h^n}{1.2.3...n} F^n(x + \theta h),$$

dans laquelle θ est un nombre compris entre 0 et 1.

Exemple.

Soit $$y = \log(a + x).$$

On a $$F(x) = \log(a + x), \quad F(x + h) = \log(a + x + h).$$

Et en dérivant successivement :

$$F'(x) = +\frac{1}{a + x},$$

$$F''(x) = -\frac{1}{(a + x)^2},$$

$$F'''(x) = +\frac{1.2}{(a + x)^3},$$

$$F^{IV}(x) = -\frac{1.2.3}{(a + x)^4},$$

etc.

Substituant les valeurs de ces quantités dans la formule de Taylor, on obtient

$$\log(a+x+h)=\log(a+x)+h\frac{1}{a+x}-\frac{h^2}{1.2}\frac{1}{(a+x)^2}$$
$$+\frac{h^3}{1.2.3}\frac{1.2}{(a+x)^3}-\frac{h^4}{1.2.3.4}\frac{1.2.3}{(a+x)^4}+\text{etc.}$$

ou $$\log(a+x+h)=\log(a+x)+\frac{h}{a+x}-\frac{1}{2}\left(\frac{h}{a+x}\right)^2$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{a+x}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{h}{a+x}\right)^4+\text{etc.}$$

On aurait pu tirer les dérivées successives de la fonction, à partir de celle du deuxième ordre, de l'expression de la dérivée $n^{\text{ème}}$

$$(-1)^{n-1}\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(a+x)^n},$$

en faisant successivement $n=2, 3, 4$, etc.

D'ailleurs, l'erreur commise en s'arrêtant au $n^{\text{ème}}$ terme de la série qui représente $\log(a+x+h)$ est comprise entre la plus grande et la plus petite valeur de

$$(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{h}{a+x+\theta h}\right)^n.$$

La plus petite valeur absolue se trouve en faisant $\theta=1$; la plus grande en faisant $\theta=o$.

L'erreur est donc comprise entre

$$(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{h}{a+x+h}\right)^n \text{ et } (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{h}{a+x}\right)^n.$$

Ces limites sont négatives si n est pair, positives si n est impair, et, par suite, l'erreur négative ou positive dans les mêmes cas.

Exercices.

1. $y = a^{mx}$.

La dérivée de l'ordre n^{ème} (voir chapitre III, exercice 3) est

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (m \log a)^n\, a^{mx}.$$

Et, par suite,

$$a^{m(x+h)} = a^{mx}\left[1 + \frac{mh}{1}\log a + \frac{m^2h^2}{1.2}(\log a)^2 + \frac{m^3h^3}{1.2.3}(\log a)^3 + \text{etc.}\right].$$

L'erreur commise en s'arrêtant au n^{ème} terme est comprise entre

$$\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}(m \log a)^n a^{mx} \text{ et } \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}(m \log a)^n\, a^{m(x+h)}.$$

2. $y = (a + bx)^m$.

De ce que (voir chapitre III, exemple II)

$$F^n(x) = m(m-1)\ldots.(m-n+1)\, b^n\, (a+bx)^{m-n},$$

$$[a + b(x+h)]^m = (a+bx)^m\left[1 + \frac{m}{1}\frac{bh}{a+bx} + \frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{bh}{a+bx}\right)^2 \right.$$

$$\left. + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\left(\frac{bh}{a+bx}\right)^3 + \text{ etc.}\right].$$

Les limites de l'erreur commise en s'arrêtant au n^{ème} terme sont

$$\frac{m(m-1)\ldots.(m-n+1)}{1.2\ldots n}\, b^n\, h^n\, [a + b(x+h)]^{m-n}$$

$$\text{et } \frac{m(m-1)\ldots.(m-n+1)}{1.2\ldots n}\, b^n\, h^n\, (a+bx)^{m-n}.$$

3. $y = \dfrac{a+x}{a-x}$.

On a trouvé, chapitre III, exemple I,

$$F^n(x) = \frac{2.2.3.4 \ldots . n.a}{(a-x)^{n+1}}.$$

A l'aide de cette expression, on obtient facilement

$$\frac{a+x+h}{a-x+h} = \frac{a+x}{a-x} + 2a\left[\frac{h}{(a-x)^2} + \frac{h^2}{(a-x)^3} + \frac{h^3}{(a-x)^4} + \text{etc.}\right].$$

L'erreur commise en s'arrêtant au n^{ème} terme a pour limites

$$2a\,\frac{h^n}{(a-x)^{n+1}} \quad \text{et} \quad 2a\,\frac{h^n}{(a-x-h)^{n+1}}.$$

4. $y = e^{ax} \sin mx$.

En se servant du résultat de l'exercice 7, chapitre III,

$$F^n(x) = (a^2 + m^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \sin(mx + n\varphi),$$

on trouve

$$e^{a(x+h)} \sin m(x+h) = e^{ax}\Big[\sin mx + h\,(a^2+m^2)^{\frac{1}{2}} \sin(mx+\varphi)$$

$$+ \frac{h^2}{1.2}(a^2+m^2)^{\frac{2}{2}} \sin(mx+2\varphi)$$

$$+ \frac{h^3}{1.2.3}(a^2+m^2)^{\frac{3}{2}} \sin(mx+3\varphi) + \text{etc.}\Big].$$

Si $a = 1$ et $m = 1$, la fonction est $y = e^x \sin x$ et le résultat précédent donne

$$e^{x+h} \sin(x+h) = e^x\Big[\sin x + 2^{\frac{1}{2}} h \sin(x+\varphi) + \frac{h^2}{1.2}\cdot 2\sin(x+2\varphi)$$

$$+ \frac{h^3}{1.2.3} 2^{\frac{3}{2}} \sin(x+3\varphi) + \text{etc.}\Big].$$

5. $y = e^{ax} \cos mx$.

En opérant comme dans l'exercice 7, chapitre III, on trouverait

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (a^2+m^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \cos(mx + n\varphi).$$

Et facilement

$$e^{a(x+h)}\cos m(x+h) = e^{ax}\left[\cos mx + h(a^2+m^2)^{\frac{1}{2}}\cos(mx+\varphi)\right.$$
$$+\frac{h^2}{1.2}(a^2+m^2)\cos(mx+2\varphi)$$
$$\left.+\frac{h^3}{1.2.3}(a^2+m^2)\cos(mx+3\varphi)+\text{etc.}\right].$$

Si $m=\sin t$ et $a=\cos t$,

$$e^{(x+h)\cos t}\cos\left[(x+h)\sin t\right] = e^{x\cos t}\left[\cos(x\sin t)+h\cos(x\sin t+t)\right.$$
$$+\frac{h^2}{1.2}\cos(x\sin t+2t)+\frac{h^3}{1.2.3}\cos(x\sin t+3t)$$
$$\left.+\text{etc.}\right].$$

6. $y = \text{arc tang } x$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

En faisant $a = 1$ dans le résultat de l'exercice 16, chapitre III, on trouve

$$\frac{d^n \text{arc tang } x}{dx^n} = \frac{d^{n-1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1}1.2.3\ldots(n-1)\frac{\sin n\varphi}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}},$$

expression dans laquelle $\varphi = \text{arc tang } \frac{1}{x}$.

Or de cette dernière égalité, on tire

$$\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} = \sin^n\varphi, \text{ d'où } \frac{1}{1+x^2} = \sin^2\varphi.$$

Donc,

$$\frac{d^n \text{arc tang } x}{dx^n} = (-1)^{n-1}1.2.3\ldots(n-1)\sin n\varphi\sin^n\varphi$$

et, par suite,

$$\text{arc tang}(x+h) = \text{arc tang}\, x + \frac{h}{1}\sin\varphi\sin\varphi - \frac{h^2}{2}\sin 2\varphi\sin^2\varphi$$
$$+ \frac{h^3}{3}\sin 3\varphi\sin^3\varphi - \frac{h^4}{4}\sin 4\varphi\sin^4\varphi + \text{etc.}$$

De ce développement on peut déduire

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\varphi}{2} + \sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi + \text{etc.};$$

et, par dérivation,

$$o = \frac{1}{2} + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \text{etc.}$$

(Voir Euler, *Inst. calc. diff.*)

7. $y = \text{arc cotg}\, x$.

On pourrait trouver le développement de arc cotg $(x+h)$ de la même manière que celui de arc tang $(x+h)$, mais celui-ci peut fournir le premier.

En effet,

$$\text{arc tang}(x+h) = \frac{\pi}{2} - \text{arc cotg}(x+h),$$

$$\text{arc tang}\, x = \frac{\pi}{2} - \text{arc cotg}\, x = \frac{\pi}{2} - y.$$

En outre,

$$\varphi = \text{arc tang}\frac{1}{x} = \text{arc cotg}\, x = y.$$

Par substitution de ces valeurs dans le résultat de l'exercice précédent, on trouve

$$\text{arc cotg}(x+h) = y - \frac{h}{1}\sin y\sin y + \frac{h^2}{2}\sin 2y\sin^2 y$$
$$- \frac{h^3}{3}\sin 3y\sin^3 y + \text{etc.}$$

8. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{1-(x+h)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\begin{array}{l} 1 + \dfrac{h}{1}\dfrac{x}{1-x^2} + \dfrac{h^2}{1.2}\dfrac{1+2x^2}{(1-x^2)^2} + \dfrac{h^3}{1.2.3}\dfrac{3x(3+2x^2)}{(1-x^2)^3} \\ + \dfrac{h^4}{1.2.3.4}\dfrac{3(3+24x^2+8x^4)}{(1-x^2)^4} + \dfrac{h^5}{1.2.3.4.5}\dfrac{15x(15+40x^2+8x}{(1-x^2)^5} \\ + \dfrac{h^6}{1.2.3.4.5.6}\dfrac{30(5+90x^2+120x^4+16x^6)}{(1-x^2)^6} + \text{etc.} \end{array}\right.$$

9. Supposons que l'on ait

$y = \text{arc log tang}\, x$,

c'est-à-dire soit y un arc dont le logarithme de la tangente est x.

On a $x = \log \text{tang}\, y$, et de cette égalité on tire aisément les dérivées successives de y par rapport à x.

La formule de Taylor donne ensuite

$$\begin{aligned} \text{arc log tang}(x+h) = y &+ \frac{h}{1}\frac{\sin 2y}{2} + \frac{h^2}{1.2}\frac{\sin 2y \cos 2y}{2} + \frac{h^3}{1.2.3}\frac{\sin 2y \cos 4y}{2} \\ &+ \frac{h^4}{1.2.3.4}\frac{\sin 2y}{2}(\cos 6y - \sin 2y \sin 4y) \\ &+ \frac{h^5}{1.2.3.4.5}\frac{\sin 2y}{2}(\cos 8y - 2\sin 2y \sin 6y) + \text{etc.} \end{aligned}$$

10. $y = \dfrac{1}{a^2 - x^2}$.

En faisant $b = 1$ dans le résultat de l'exemple IV, chapitre III, on a

$$F^n\left(\frac{1}{a^2-x^2}\right) = \frac{1.2.3\ldots n}{2a(a^2-x^2)^{n+1}}\left[(a+x)^{n+1} - (-1)^{n+1}(a-x)^{n+1}\right].$$

Et, par suite,

$$\frac{1}{a^2-(x+h)^2}=\frac{1}{2a(a^2-x^2)}\left\{\begin{array}{l} 2a+\dfrac{h}{a^2-x^2}\left[(a+x)^2-(a-x)^2\right] \\ +\left(\dfrac{h}{a^2-x^2}\right)^2\left[(a+x)^3+(a-x)^3\right] \\ +\left(\dfrac{h}{a^2-x^2}\right)^3\left[(a+x)^4-(a-x)^4\right] \\ +\text{ etc.}\end{array}\right\}.$$

Section II. — *Théorème de Maclaurin.*

Soit encore $y=F(x)$ une fonction explicite y de x.

En représentant par $F(o)$ et par $F'(o)$, $F''(o)$, $F'''(o)$, etc. ce que deviennent la fonction et ses dérivées successives quand on y fait $x=o$, on obtient pour expression du théorème de Maclaurin

$$F(x)=F(o)+\frac{x}{1}F'(o)+\frac{x^2}{1.2}F''(o)+\frac{x^3}{1.2.3}F'''(o)+\text{etc.}$$

Si l'on s'arrête au n^ème terme de la série, la somme R des termes qui suivent est

$$R=\frac{x^n}{1.2.3\ldots.n}F^n(\theta x),$$

ou

$$R=\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots.(n-1)}F^n(\theta x),$$

θ étant une fraction comprise entre o et 1.

Pour que le développement représente la fonction proposée, il faut qu'il soit convergent et que R ait pour limite o, quand n croît indéfiniment. Ce sera chose très-utile de s'assurer s'il en est ainsi dans les exercices suivants, comme dans ceux de la section I, dont les résultats doivent satisfaire aux mêmes conditions.

Du reste, la série de Maclaurin peut aussi servir au développement des fonctions implicites.

Exemple I.

Soit

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

On a

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \qquad \text{d'où } F(o) = 1.$$

Et, en différentiant,

$$F'(x) = \frac{1}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{d'où } F'(o) = \frac{1}{2};$$

$$F''(x) = \frac{1.3}{2^2(1-x)^{\frac{5}{2}}}, \quad \text{d'où } F''(o) = \frac{1.3}{2^2};$$

$$F'''(x) = \frac{1.3.5}{2^3(1-x)^{\frac{7}{2}}}, \quad \text{d'où } F'''(o) = \frac{1.3.5}{2^3};$$

etc.

Substituant les valeurs de $F(o)$, $F'(o)$, $F''(o)$, $F'''(o)$, etc. dans la formule de Taylor, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{2^3} + \frac{5x^3}{2^4} + \frac{7x^4}{2^5} + \text{etc.}$$

Si la dérivée de l'ordre $n^{\text{ème}}$ de la fonction proposée était connue, en y faisant $x = o$, on obtiendrait une expression d'où l'on pourrait tirer $F'(o)$, $F''(o)$, etc.

Ainsi, dans l'exemple actuel,

$$F^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) = \frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2^n(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}},$$

et, pour $x = o$,

$$F^n(o) = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}.$$

En faisant donc $n = 1, 2, 3$, etc. dans cette dernière expression, on obtiendrait les valeurs de $F'(o)$, $F''(o)$, etc.

Exemple II.

Soit l'équation $$y^3 - y + x = o,$$
le but étant de développer y en fonction de x par la formule de Maclaurin.

En dérivant successivement, on obtient

$$(3y^2-1)\frac{dy}{dx} + 1 = o,$$

$$6y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (3y^2-1)\frac{d^2y}{dx^2} = o,$$

$$6\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 18y\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + (3y^2-1)\frac{d^3y}{dx^3} = o,$$

$$36\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2} + 18y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 24y\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3} + (3y^2-1)\frac{d^4y}{dx^4} = o,$$

$$90\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 60\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^3y}{dx^3} + 60y\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^3y}{dx^3} + 30y\frac{dy}{dx}\frac{d^4y}{dx^4}$$
$$+ (3y^2-1)\frac{d^5y}{dx^5} = o,$$

$$90\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 360\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^3y}{dx^3} + 90\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^4y}{dx^4} + 60y\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2$$
$$+ 90y\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^4y}{dx^4} + 36y\frac{dy}{dx}\frac{d^5y}{dx^5} + (3y^2-1)\frac{d^6y}{dx^6} = o,$$

$$630\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\frac{d^3y}{dx^3} + 420\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 630\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^4y}{dx^4}$$
$$+ 126\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^5y}{dx^5} + 210y\frac{d^3y}{dx^3}\frac{d^4y}{dx^4} + 126y\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^5y}{dx^5}$$
$$+ 42y\frac{dy}{dx}\frac{d^6y}{dx^6} + (3y^2-1)\frac{d^7y}{dx^7} = o,$$

etc.

Maintenant si, dans l'équation proposée, on fait $x = o$, on trouve

$$y^3 - y = o,$$

ou

$$y(y^2 - 1) = o,$$

et cette dernière équation est satisfaite quand $y = o$, quand $y = 1$ et quand $y = -1$.

Ainsi, trois valeurs de y correspondantes à $x = o$ et par conséquent trois développements possibles de y en fonction de x au moyen de la formule de Maclaurin.

1° En substituant le couple de valeurs $\begin{cases} x = o, \\ y = o, \end{cases}$ dans les dérivées successives de l'équation proposée, on tire des équations résultantes

$$F'(o) = 1, \quad F''(o) = o, \quad F'''(o) = 6, \quad F^{\text{IV}}(o) = o,$$
$$F^{\text{V}}(o) = 360, \quad F^{\text{VI}}(o) = o, \quad F^{\text{VII}}(o) = 60480, \text{ etc.}$$

et l'on a d'ailleurs $F(o) = o$.

La substitution de ces valeurs dans la formule de Maclaurin donne

$$y = x + x^3 + 3x^5 + 12x^7 + \text{etc.}$$

2° Le couple de valeurs $\begin{cases} x = o, \\ y = 1, \end{cases}$ fournit de la même manière

$$F(o) = 1, \; F'(o) = -\frac{1}{2}, \; F''(o) = -\frac{3}{4}, \; F'''(o) = -\frac{51}{8}, \text{ etc.}$$

et, par suite,

$$y = 1 - \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{8} - \frac{17x^3}{16} - \text{etc.}$$

3° Le couple $\begin{cases} x = o, \\ y = -1, \end{cases}$ donne

$$F(o) = -1, \; F'(o) = -\frac{1}{2}, \; F''(o) = \frac{3}{4}, \; F'''(o) = -\frac{51}{8}, \text{ etc.}$$

D'où

$$y = -1 - \frac{x}{2} + \frac{5x^2}{8} - \frac{17x^3}{16} + \text{etc.}$$

Exercices.

1. $y = (a + x)^m$.

$$(a + x)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} x + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} x^2 + \text{etc.}$$

C'est l'expression du binôme de Newton.

Si $a = 1$ et $m = \frac{1}{2}$, on trouve

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2}\frac{x^2}{1.2} + \frac{3}{2^3}\frac{x^3}{1.2.3} - \frac{3.5}{2^4}\frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Si l'on avait fait $m = -1$, on eût trouvé

$$\frac{1}{a + x} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3} + \text{etc.}\right).$$

Ces deux derniers développements peuvent s'obtenir directement sans difficulté.

2. $y = a^x$.

$$a^x = 1 + \frac{x}{1}\log a + \frac{x^2}{1.2}\log^2 a + \frac{x^3}{1.2.3}\log^3 a + \text{etc.}$$

D'où, en faisant $a = e$,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

et, en faisant $x = 1$,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{etc.} = 2,718281828\ldots\ldots$$

3. $y = \text{Log}(a + x)$.

$$\text{Log}(a + x) = \text{Log}\,a + \text{Log}\,e\left[\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{etc.}\right].$$

Si l'on avait $y = \log(a + x)$, système népérien, on obtiendrait

$$\log(a + x) = \log a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{etc.},$$

et, si en outre $a = 1$,

$$\log(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}$$

4. $y = \sin x$.

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

En dérivant les deux membres, on obtient

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.},$$

développement que l'on trouve facilement, comme celui qui précède, en se servant de la dérivée de l'ordre $n^{\text{ème}}$ de la fonction.

5. $y = \text{tang}\, x$.

$$\text{tang}\, x = x + \frac{x^3}{1.3} + \frac{2x^5}{1.3.5} + \frac{17x^7}{1.3.5.7.9} + \text{etc.}$$

6. $y = \sec x$.

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{5x^4}{1.2.3.4} + \frac{61x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

7. $y = \text{arc} \sin x$.

En employant l'expression de la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction (chapitre III, exercice 13), on trouve

$$\text{arc} \sin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{x^7}{7} + \text{etc.}$$

D'où, puisque $\text{arc} \cos x = \frac{\pi}{2} - \text{arc} \sin x$,

$$\text{arc} \cos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} - \text{etc.}$$

8. $y = \text{arc tang } x$.

Le résultat de l'exercice 6, chapitre VI, fournit en faisant $x = o$, et par suite $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

$$\text{arc tang } h = h - \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{5} - \frac{h^7}{7} + \text{etc.}$$

et, en remplaçant h par x,

$$\text{arc tang } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{etc.}$$

Pour arriver directement à ce développement, on ferait usage des résultats de l'exercice 16, chapitre III.

D'ailleurs, puisque $\text{arc cotg } x = \frac{\pi}{2} - \text{arc tang } x$,

$$\text{arc cotg } x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \text{etc.}$$

9. $y = e^{\sin x}$.

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{3x^4}{1.2.3.4} - \frac{8x^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.}$$

10. $y = \frac{e^x}{\cos x}$.

$$\frac{e^x}{\cos x} = 1 + x + \frac{2x^2}{1.2} + \frac{4x^3}{1.2.3} + \frac{12x^4}{1.2.3.4} + \frac{35x^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.}$$

11. $y = \sqrt{1 + e^x}$.

$$\sqrt{1+e^x} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{4}\frac{x}{1} + \frac{3}{4^2}\frac{x^2}{1.2} + \frac{7}{4^3}\frac{x^3}{1.2.3} + \frac{9}{4^4}\frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}\right).$$

12. $y = e^{e^x}$.

$$e^{e^x} = e\left(1 + x + \frac{2x^2}{1.2} + \frac{5x^3}{1.2.3} + \frac{15x^4}{1.2.3.4} + \frac{52x^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.}\right).$$

13. $y = \frac{1}{\sqrt{a + bx + cx^2}}$.

En faisant $m = -\frac{1}{2}$ dans la formule (β) du chapitre III, on obtient

$$\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^n 1.2.3\ldots n \frac{(b+2cx)^n}{2^n(a+bx+cx^2)^{n+\frac{1}{2}}}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{4ac-b^2}{(b+2cx)^2}\right.$$

$$\left. + \frac{1.3}{2^2}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\frac{(4ac-b^2)^2}{(b+2cx)^4} - \text{etc.}\right],$$

expression qui, pour $x = o$, donne

$$F^n(o) = (-1)^n 1.2.3\ldots n \frac{b^n}{2^n a^{n+\frac{1}{2}}}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{4ac-b^2}{b^2}\right.$$

$$\left. + \frac{1.3}{2^3}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\frac{(4ac-b^2)^2}{b^4} - \text{etc.}\right].$$

Il suffit de faire $n = 1, 2, 3\ldots$ dans cette formule pour obtenir $F'(o)$, $F''(o)$, $F'''(o)$, etc., et, par suite,

$$\frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left[1 - \frac{x}{1}\frac{b}{2a} + \frac{x^2}{1.2}\frac{3b^2-4ac}{(2a)^2}\right.$$

$$\left. - \frac{x^3}{1.2.3}\frac{3b(5b^2-12ac)}{(2a)^3} + \text{etc.}\right].$$

14. $y = \sqrt{\dfrac{1+ax^2}{1-bx^2}}$.

$$\sqrt{\frac{1+ax^2}{1-bx^2}} = 1 + (a+b)\frac{x^2}{1.2} + 3(3b^2+2ab-a^2)\frac{x^4}{1.2.3.4}$$

$$+ 5.3.3.(5b^3+3b^2a-ba^2+a^3)\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

Newton.

15. $y = (a^5 + a^4x - x^5)^{\frac{1}{5}}$.

$$(a^5+a^4x-x^5)^{\frac{1}{5}} = a + \frac{1}{5}\frac{x}{1} - \frac{4}{5^2.a}\frac{x^2}{1.2} + \frac{4.9}{5^3a^2}\frac{x^3}{1.2.3}$$

$$- \frac{4.9.14}{5^4a^3}\cdot\frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Newton.

16. $y^2 - xy - 1 = 0$.

$$y = \pm 1 + \frac{1}{2}\frac{x}{1} \pm \frac{1}{2^2}\frac{x^2}{1.2} \mp \frac{1^2.3}{2^4}\frac{x^4}{1.2.3.4} \pm \frac{1^2.3^2.5}{2^6}\frac{x^6}{1.2.3.4.5} \mp \text{etc.}$$

17. $y^3 - 6xy - 8 = 0$.

$$y = 2 + x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

18. $y^3 - xy - 1 = 0$.

$$y = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^4} + \frac{x^4}{3^5} - \text{etc.}$$

Les deux autres valeurs de y sont

$$y = \alpha + \frac{x}{3\alpha} - \frac{x^3}{3^4} \pm \frac{x^4}{3^5\alpha} - \text{etc.}$$

$$y = \alpha^2 + \frac{x}{3\alpha^2} - \frac{x^3}{3^4} + \frac{x^4}{3^5\alpha^2} - \text{etc.}$$

dans lesquelles

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad \alpha^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

19. $\sin y = x \sin(a + y)$.

$$y = \sin n\pi + \frac{x}{1}\sin a + \frac{x^2}{1.2}\sin 2a + \frac{x^3}{1.2\,3} 2\sin a(3 - 4\sin^2 a) + \text{etc.}$$

20. $y^n \log y = ax$.

$$y = 1 + ax - (2n-1)\frac{a^2x^2}{1.2} + (3n-1)^2\frac{a^3x^3}{1.2.3} - (4n-1)^3\frac{a^4x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Section III. — *Théorème de Lagrange.*

Si y est donnée par une équation de la forme

$$y = z + x\varphi(y)$$

et si $u = f(y)$, f et φ étant des fonctions quelconques, u peut

être développé suivant les puissances de x par la formule

$$u = f(z) + \varphi(z).f'(z).\frac{x}{1} + \frac{d.\{[\varphi(z)]^2 f'(z)\}}{dz}\frac{x^2}{1.2}$$

$$+ \frac{d^2.\{[\varphi(z)]^3 f'(z)\}}{dz^2}\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma).$$

Si $f(y)$ se réduit à y, $f(z) = z$, $f'(z) = 1$ et l'on a

$$y = z + \varphi(z)\frac{x}{1} + \frac{d.[\varphi(z)]^2}{dz}\frac{x^2}{1.2} + \frac{d^2[\varphi(z)]^3}{dz^2}\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.} \quad (\delta).$$

Exemple I.

Soit l'équation

$$a \log y + b - y = o,$$

et supposons qu'on ait à développer y suivant les puissances de a.

L'équation proposée peut s'écrire

$$y = b + a \log y,$$

et en la comparant avec l'équation de départ du théorème de Lagrange, c'est-à-dire avec

$$y = z + x\,\varphi(y),$$

on voit que dans l'exemple actuel

$$z = b,\; x = a,\; \varphi(y) = \log y,$$

$f(y)$ se réduisant d'ailleurs à y.

Donc $\qquad \varphi(z) = \log z = \log b,$

$$\frac{d.[\varphi(z)]^2}{dz} = \frac{d.(\log z)^2}{dz} = \frac{2}{z}\log z = \frac{2}{b}\log b,$$

$$\frac{d^2[\varphi(z)]^3}{dz^2} = \frac{d^2.(\log z)^3}{dz^2} = \frac{3 \log z}{z^2}(2 - \log z)$$

$$= \frac{3 \log b}{b^2}(2 - \log b),$$

etc.

Substituant ces valeurs de $x, z, \varphi(z), \frac{d.[\varphi(z)]^2}{dz}$, etc. dans la formule ($\delta$) on trouve

$$y = b + \frac{a}{1}\log b + \frac{a^2}{1.2}\frac{2\log b}{b} + \frac{a^3}{1.2.3}\frac{3\log b}{b^2}(2 - \log b) + \text{etc.}$$

Exemple II.

Soit l'équation

$$ae^y - by + c = o,$$

y^n devant être développé suivant les puissances de $\frac{a}{b}$.

L'équation proposée peut être mise sous la forme

$$y = \frac{c}{b} + \frac{a}{b}e^y,$$

et sa comparaison avec l'équation type

$$y = z + x\varphi(y)$$

fournit

$$z = \frac{c}{b}, \quad x = \frac{a}{b}, \quad \varphi(y) = e^y.$$

On a du reste $f(y) = y^n$.

Donc

$$\varphi(z) = e^z = e^{\frac{c}{b}},$$

et

$$f(z) = z^n = \left(\frac{c}{b}\right)^n, \quad \text{d'où } f'(z) = nz^{n-1}.$$

Il suit de là que

$$\varphi(z)f'(z) = ne^z.z^{n-1} = ne^{\frac{c}{b}}\left(\frac{c}{b}\right)^{n-1},$$

$$[\varphi(z)]^2 f'(z) = ne^{2z}.z^{n-1},$$

$$[\varphi(z)]^3 f'(z) = ne^{3z}.z^{n-1},$$

$$[\varphi(z)]^4 f'(z) = ne^{4z}.z^{n-1},$$

etc.

et, par dérivation,

$$\frac{d.\{[\varphi(z)]^2 f'(z)\}}{dz} = ne^{2z} z^{n-2}[2z+(n-1)] = ne^{\frac{2c}{b}}\left(\frac{c}{b}\right)^{n-2}\left[2\left(\frac{c}{b}\right)+(n-1)\right],$$

$$\frac{d^2.\{[\varphi(z)]^3 f'(z)\}}{dz^2} = ne^{3z} z^{n-3}[3^2.z^2+2.3(n-1)z+(n-1)(n-2)]$$

$$= ne^{\frac{3c}{b}}\left(\frac{c}{b}\right)^{n-3}\left[3^2\left(\frac{c}{b}\right)^2+2.3(n-1)\frac{c}{b}+(n-1)(n-2)\right],$$

$$\frac{d^3.\{[\varphi(z)]^4 f'(z)\}}{dz^3} = ne^{4z}.z^{n-4}[4^3 z^3+3.4^2(n-1)z^2+3.4(n-1)(n-2)z$$

$$+(n-1)(n-2)(n-3)] = ne^{\frac{4c}{b}}\left(\frac{c}{b}\right)^{n-4}\left[4^3\left(\frac{c}{b}\right)^3\right.$$

$$+3.4^2(n-1)\left(\frac{c}{b}\right)^2+3.4(n-1)(n-2)\frac{c}{b}$$

$$\left.+(n-1)(n-2)(n-3)\right],$$

etc.

En substituant les valeurs de x, de $f(z)$, de $\varphi(z)f'(z)$, de $\frac{d.\{[\varphi(z)]^2 f'(z)\}}{dz}$, etc. dans la formule (γ), on trouve

$$y^n = \left(\frac{c}{b}\right)^n \left\{ \begin{aligned} &1+ne^{\frac{c}{b}}.\frac{b}{c}.\frac{a}{b}+ne^{\frac{2c}{b}}\frac{\left(\frac{b}{c}\right)^2\left(\frac{a}{b}\right)^2}{1.2}\left[2\frac{c}{b}+(n-1)\right] \\ &+ne^{\frac{3c}{b}}\frac{\left(\frac{b}{c}\right)^3\left(\frac{a}{b}\right)^3}{1.2.3}\left[3^2\left(\frac{c}{b}\right)^2+2.3(n-1)\frac{c}{b}+(n-1)(n-2)\right] \\ &+ne^{\frac{4c}{b}}\frac{\left(\frac{b}{c}\right)^4\left(\frac{a}{b}\right)^4}{1.2.3.4}\left[4^3+3.4^2(n-1)\left(\frac{c}{b}\right)^2+3.4(n-1)(n-2)\frac{c}{b}\right. \\ &\left.+(n-1)(n-2)(n-3)\right]+\text{etc.} \end{aligned} \right\}$$

Exercices.

1. $y^2 - py + q = o.$

Développer y suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{p}$.

$$y = \frac{q}{p}\left(1 + \frac{q}{p^2} + \frac{4}{1.2}\frac{q^2}{p^4} + \frac{5.6}{1.2.3}\frac{q^3}{p^6} + \text{etc.}\right).$$

2. $y^3 - ay + b = o,$

y suivant les puissances de $\frac{1}{a}$.

$$y = \frac{b}{a}\left(1 - \frac{b^2}{a^3} + 3\frac{b^4}{a^6} + 12\frac{b^6}{a^9} + 55\frac{b^8}{a^{12}} + \text{etc.}\right).$$

3. $ay^n - y + b = o,$

y suivant les puissances de a.

$$y = b\left[1 + b^{n-1}a + 2nb^{n-2}\frac{a^2}{1.2} + 3n(3n-1)b^{n-3}\frac{a^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right].$$

Dans chacun des exercices précédents, la série est le développement de la plus petite racine de l'équation proposée. (Voir, pour tout ce qui regarde la théorie, les *Équations numériques* de Lagrange et les *Mémoires de Berlin*, 1768.)

4. $ay^2 - by + c = o.$

Posant $y^2 = y_1$, l'équation devient

$$ay_1 - b\sqrt{y_1} + c = o, \text{ d'où } y_1 = -\frac{c}{a} + \frac{b}{a}\sqrt{y_1}$$

et si l'on développe $\sqrt{y_1}$ en fonction de $\frac{b}{a}$, on obtient

$$\sqrt{y_1} = y = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}\left[1 - \frac{1}{1.2}\cdot\frac{b^2}{2^2ac} - \frac{1.1.3}{1.2.3.4}\frac{b^4}{2^4a^2c^2} - \frac{1.1.3.3.5}{1.2.3.4.5.6}\frac{b^6}{2^6.a^3c^3} - \text{etc.}\right],$$

série qui représente les deux racines de l'équation proposée, le radical $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ étant pris positivement pour l'une, négativement pour l'autre.

5. $y^3 - py + q = o.$

L'équation devient quand on fait $y^3 = y_1$

$$y_1 - py_1^{\frac{1}{3}} + q = o \quad \text{ou } y_1 = -q + py_1^{\frac{1}{3}}$$

et en développant $y_1^{\frac{1}{3}}$ suivant les puissances ascendantes de p, on trouve

$$y_1^{\frac{1}{3}} = y = (-q)^{\frac{1}{3}}\left[1 + \frac{1}{3}\frac{p}{(-q)^{\frac{2}{3}}} - \frac{2.1}{3^3.1.2.3}\cdot\frac{p^3}{(-q)^2} + \frac{2.1.4}{3^4.1.2.3.4}\frac{p^4}{(-q)^{\frac{8}{3}}} - \text{etc.}\right],$$

série qui fournit le développement des trois racines de l'équation proposée, $(-q)^{\frac{1}{3}}$ admettant les trois valeurs

$$-q^{\frac{1}{3}},\ \left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)q^{\frac{1}{3}} \text{ et } \left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)q^{\frac{1}{3}}.$$

6. $ay^n - by + c = o.$

Soit $y^n = y_1$; l'équation devient

$$ay_1 - by_1^{\frac{1}{n}} + c = o \quad \text{ou } y_1 = -\frac{c}{a} + \frac{b}{a}y_1^{\frac{1}{n}},$$

puis en développant $y_1^{\frac{1}{n}}$ en fonction de $\frac{b}{a}$, et posant pour abréger $\left(-\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = \varepsilon$, il vient

$$y_1^{\frac{1}{n}} = y = \varepsilon\left[1 - \frac{1}{n}\frac{b\varepsilon}{c} + \frac{3-n}{1.2.n^2}\frac{b^2\varepsilon^2}{c^2} - \frac{(3-n)(4-n)}{1.2.3.n^3}\frac{b^3\varepsilon^3}{c} + \text{etc.}\right],$$

série qui fournit les valeurs des n racines de l'équation pro-

posée en faisant successivement $K = 1, 2.3.4 \ldots. n$ dans l'expression

$$\left(\cos \frac{2K\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2K\pi}{n}\right) \sqrt[n]{-\frac{a}{c}}$$

et substituant les résultats à ε.

7. $a^y \sin a - y + 1 = o$,

y suivant les puissances de $\sin a$.

$$y = 1 + \frac{a \sin a}{1} + 2 \log a . \frac{a^2 \sin^2 a}{1.2} + 3^2 (\log a)^2 \frac{a^3 \sin^3 a}{1.2.3} + \text{etc.}$$

8. $y = e + x \log y$,

y en fonction de x.

$$y = e + \frac{x}{1} + \frac{2}{a}\frac{x^2}{1.2} + \frac{3}{a^2} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{4}{a^3} \cdot \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

9. $ay - y + 1 = o$.

Développer $\sin\left(1 - \frac{1}{y}\right)$ en fonction de a.

$$\sin\left(1 - \frac{1}{y}\right) = a - \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

10. $e^y - y + 1 = o$.

Développer e^y.

$$e^y = e\left(1 + e + \frac{3e^2}{1.2} + \frac{4^2 e^3}{1.2.3} + \frac{5^3 e^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}\right).$$

11. $y^2 - 2y + 1 = o$.

Développement de $\log y$.

$$\log y = \log \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{1.2.2^4} + \frac{4.5}{1.2.3.2^6} + \text{etc.}$$

La plus petite des racines de l'équation proposée pouvant être considérée comme égale à 1, on a

$$\log 1 = o = \log \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{1.2.2^4} + \text{etc.}$$

D'où

$$\log 2 = \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{3}{1.2.2^2} + \frac{4.5}{1.2.3.2^4} + \text{etc.}\right).$$

12. $y^2 - 5y + 6 = o$.

Développement de y^n.

$$y^n = \left(\frac{6}{5}\right)^n \left[1 + n.\frac{6}{5^2} + \frac{n(n+3)}{1.2}\frac{6^2}{5^4} + \frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3.}\frac{6^3}{5^6} + \text{etc.}\right].$$

On a $y^n = 2^n$, puisque 2 est la plus petite des racines de l'équation proposée.

13. $y^3 - y + 1 = o$.

Développement de y^n.

$$y^n = 1 + n + \frac{n(n+5)}{1.2} + \frac{n(n+7)(n+8)}{1.2.3}$$
$$+ \frac{n(n+9)(n+10)(n+11)}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

14. $ay^2 - by + c = o$,

somme des n^{èmes} puissances négatives des racines.

Lagrange a démontré que, y étant fournie par l'équation $y = z + x\varphi(y)$ et $\frac{1}{y^n}$ par le théorème, l'ensemble des termes de la série contenant les puissances négatives de z est la somme des n^{èmes} puissances négatives de l'équation.

Si donc α et β représentent les racines de l'équation proposée, on trouve facilement

$$\frac{1}{\alpha^n} + \frac{1}{\beta^n} = \left(\frac{b}{c}\right)^n \left[1 - \frac{na}{b}\frac{c}{b} + \frac{n(n-3)}{1.2}\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{c}{b}\right)^2\right.$$
$$\left. - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3.}\frac{a^3}{b^3}\left(\frac{c}{b}\right)^3 + \text{etc.}\right],$$

en ne prenant de la série que les termes qui renferment des puissances positives de $\frac{b}{c}$ ou, ce qui revient au même, des puissances négatives de $\frac{c}{b}$.

Le développement tout entier de $\frac{1}{y^n}$ serait celui de la plus petite racine de l'équation.

15. $ay^m - by + c = o.$

En représentant par $\Sigma(\alpha^{-n})$ la somme des n^{èmes} puissances des racines inverses, on trouve

$$\Sigma(\alpha^{-n}) = \left(\frac{b}{c}\right)^n \left[1 - n\left(\frac{c}{b}\right)^{m-1}\frac{a}{b} + \frac{n(n-2m+1)}{1.2}\left(\frac{c}{b}\right)^{2m-2}\frac{a^2}{b^2}\right.$$
$$\left. - \frac{n(n-3m+1)(n-3m+2)}{1.2.3}\left(\frac{c}{b}\right)^{3m-3}\frac{a^3}{b^3} + \text{etc.}\right],$$

en ne prenant de la série que les termes qui renferment des puissances positives de $\frac{b}{c}$ ·

Si dans l'équation proposée on changeait y en $\frac{1}{y}$ et qu'on cherchât la somme des n^{èmes} puissances des racines inverses de l'équation transformée, cette somme serait celle des n^{èmes} puissances des racines de l'équation primitive.

16. $u = t + e \sin u.$

Développer u et $\sin u$ en fonction de e.

On trouve

$$u = t + \sin t . \frac{e}{1} + \sin 2t . \frac{e^2}{1.2} + \frac{3}{4}(3\sin 3t - \sin t)\frac{e^3}{1.2.3}$$
$$+ (8\sin 4t - 4\sin 2t)\frac{e^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

et

$$\sin u = \sin t + \frac{\sin 2t}{2}\frac{e}{1} + \frac{3\sin 3t - \sin t}{4}\frac{e^2}{1.2}$$
$$+ (2\sin 4t - \sin 2t)\frac{e^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

L'équation proposée est celle du problème de Kepler, célèbre en astronomie : t désigne le temps ou une quantité qui lui est proportionnelle ; e représente l'excentricité de

l'orbite elliptique d'une planète et u l'anomalie excentrique.

17. $y = \dfrac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}$.

Développer y^n suivant les puissances ascendantes de e.

En considérant $\dfrac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}$ comme l'une des racines d'une équation du deuxième degré, dont l'autre serait $\dfrac{e}{1-\sqrt{1-e^2}}$, l'équation elle-même serait

$$u^2 - \frac{2}{e}u + 1 = o$$

et, de là, par le procédé ordinaire,

$$y^n = \left(\frac{e}{2}\right)^n \left[1 + n\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \frac{n(n+3)}{1.2.}\left(\frac{e}{2}\right)^4 + \text{etc.}\right].$$

18. Développer $\dfrac{1}{\sqrt{1-2xz+x^2}}$ suivant les puissances ascendantes de x.

Posant $\sqrt{1-2xz+x^2} = 1 - xy,$

on tire de cette égalité

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+x^2}} = \frac{dy}{dz},$$

et

$$y = z + \frac{1}{2}x(y^2-1).$$

La comparaison de cette dernière équation avec l'équation type donne

$$\varphi(y) = \frac{1}{2}(y^2-1).$$

D'autre part, la formule (δ) fournit par dérivation

$$\frac{dy}{dz} = 1 + \frac{d.\varphi(z)}{dz}\frac{x}{1} + \frac{d^2.[\varphi(z)]^2}{dz^2}\frac{x^2}{1.2} + \frac{d^3.[\varphi(z)]^3}{dz^3}\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+x^2}} = 1 + \frac{x}{1.2}\frac{d.(z^2-1)}{dz} + \frac{x^2}{1.2.2^2}\frac{d^2.(z^2-1)}{dz^2} + \text{etc.}$$

CHAPITRE VII.

CHANGEMENT DE VARIABLES.

Premier cas.

Une seule variable indépendante.

Soit

$$F\left((x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \text{etc.}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha),$$

une expression contenant une fonction y de la variable indépendante x et les dérivées successives de y par rapport à x.

S'il s'agit de chercher ce que devient l'expression (α) quand la variable indépendante est y, on y fera

$$(1)\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}},\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3},\ \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2 - \frac{dx}{dy}\frac{d^3x}{dy^3}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5},\ \text{etc.}$$

Si l'on veut savoir ce que devient (α) quand la variable indépendante est t au lieu de x, les variables x et t étant liées par l'équation

$$\varphi(x, t) = 0,$$

dans les formules

$$(2)\left\{\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}, \\ &\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\frac{dx}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{dy}{dt}\frac{d^3x}{dt^3}\right) - 3\frac{d^2x}{dt^2}\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right.$$

on remplacera $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^3x}{dt^3}$, etc. par leurs valeurs tirées de l'équation de liaison, puis, dans (α), on portera les expressions qui en résulteront pour $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc., ainsi que la valeur de x en t fournie par l'équation $\varphi = o$.

Enfin, si l'on désire connaître ce que devient (α) quand y et x sont remplacés par u et t, les quatre variables étant liées par les équations.

$$\varphi_1(x, y, u, t) = o,$$
$$\varphi_2(x, y, u, t) = o,$$

on remplacera dans les formules (2) $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}$, etc. par leurs valeurs obtenues en dérivant les équations de liaison par rapport à t, puis, dans (α), on portera les expressions de $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc., ainsi que celles de x et y en fonction de u et t, fournies par la résolution des équations $\varphi_1 = o$, $\varphi_2 = o$.

Exemple I.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = o.$$

Que devient cette équation quand la variable indépendante est y?

En faisant usage des formules de transformation (1), on a

$$-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3} - x\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} - y\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3} = o,$$

ou, en changeant les signes et chassant les dénominateurs,

$$\frac{d^2x}{dy^2} + x\frac{dx}{dy} + y = o.$$

Exemple II.

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (a+1)\,x\,\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Changer la variable indépendante x en t, sachant que

$$t = \log x.$$

De l'équation de liaison on tire, en remarquant que $x = e^t$,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^3x}{dt^3} = e^t.$$

Substituant les valeurs de ces dérivées dans les formules (2), on obtient

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\,\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} + 2\,\frac{dy}{dt} - 3\,\frac{d^2y}{dt^2}\right),$$

et, en remplaçant x et les dérivées précédentes par leurs valeurs dans l'équation proposée,

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{dy}{dt} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + (a+1)\frac{dy}{dt} - y = 0,$$

ou

$$\frac{d^3y}{dt^3} + a\,\frac{dy}{dt} - y = 0.$$

Exemple III.

$$(x + y - 6)\,\frac{dy}{dx} + (x + y + 6) = 0.$$

Que devient cette équation quand les variables sont u et t, sachant que

$$x = u + t,$$
$$y = u - t\,?$$

Les équations de liaison donnent

$$\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}+1,$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{du}{dt}-1.$$

Substituant dans la première des formules (2), on trouve

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{du}{dt}-1}{\frac{du}{dt}+1}.$$

Les équations de liaison fournissent encore $x+y=2u$, $x-y=2t$.

Remplaçant $x+y$, $x-y$ et $\frac{dy}{dx}$ par les valeurs trouvées, l'équation primitive devient

$$(2u-6)\frac{\frac{du}{dt}-1}{\frac{du}{dt}+1}+2u+6=o,$$

ou

$$u\frac{du}{dt}+3=o.$$

Exercices.

1. L'expression du rayon de courbure des courbes planes, quand x est la variable indépendante, est

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Que devient-elle quand y est la variable indépendante?

On trouve

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{d^2x}{dy^2}}.$$

2. $\left(\frac{d^3y}{dx^3} + y\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\left(3\frac{dy}{dx} + x^2\right) = 0.$

Que devient cette équation quand la variable indépendante est y?

Elle devient $\frac{d^3x}{dy^3} + x^2\frac{d^2x}{dy^2} - y\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0.$

3. $(1-x)^3\frac{dy}{dx} + 2a(1+x) = 0.$

Changer x en t, sachant que $t = \frac{1+x}{1-x}$.

On trouve
$$\frac{dy}{dt} + at = 0.$$

4. $(1+x^2)x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\left(1 - x^2y\sqrt{1+x^2}\right) - x^3y^2 = 0.$

Prendre t pour variable indépendante, sachant que
$$t = \sqrt{1+x^2}.$$

On obtient
$$\frac{d^2y}{dt^2} + y\frac{dy}{dt} - y^2 = 0.$$

5. $(1-x^2)^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 2x(1-x^2)\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0.$

Prendre t pour variable indépendante, sachant que $x = \sin t$.

Le résultat est
$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 1 = 0.$$

6. $(1-x^2)^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x(1-x^2)\frac{dy}{dx} + \frac{2a}{1-x}y = 0.$

Prendre t pour variable indépendante, sachant que $x = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$.

On trouve
$$\frac{d^2y}{dt^2} + a(e^{2t}+1)y = 0.$$

7. $y + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$

Prendre t pour variable indépendante, sachant que $x^2 = 4t$.

Le résultat est

$$y + \frac{dy}{dt} + t\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

(Fourier, *Traité de la chaleur.*)

8. $$\frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x + y\frac{dy}{dx}}.$$

Que devient cette expression quand les variables sont r et t, sachant que

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t?$$

Elle devient
$$\frac{r}{\frac{dr}{dt}}.$$

9. $$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Changer de variables sachant que $x = r\cos t$, $y = r\sin t$.

On obtient, pour l'expression du rayon de courbure en coordonnées polaires,

$$\frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2}}.$$

10. $$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Transformer cette expression en une autre dans laquelle la variable indépendante soit s, sachant que

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

On obtient, en faisant usage des formules (2),

$$\frac{d^2y}{ds^2}\frac{dx}{ds} - \frac{d^2x}{ds^2}\frac{dy}{ds}.$$

11. $$\left[(x-y)\sqrt{x^2-y^2} + (x-y)^2 - 2y^2\right]\frac{dy}{dx}$$
$$+ (x+y)\sqrt{x^2-y^2} + x^2 + y^2 = 0.$$

Changer les variables y et x en u et t, sachant que

$$x = u^2 + t^2,$$
$$y = 2ut.$$

Le résultat est

$$(u+t)^2\frac{du}{dt} + (u-t)^2 = 0.$$

12. $$xy\frac{d^2y}{dx^2} - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^3 = 0.$$

Changer les variables y et x en u et t, sachant que

$$x = e^t,$$
$$y = e^u.$$

On trouve $$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{du}{dt} + e^{u+t} = 0.$$

Second cas.

Plusieurs variables indépendantes.

Soit l'expression

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx\,dy}, \frac{d^2z}{dy^2} \cdots\right) \quad . \quad . \quad (\beta),$$

renfermant les dérivées partielles des divers ordres de la fonction z par rapport aux variables indépendantes x et y et les variables elles-mêmes.

Pour savoir ce que devient cette expression quand x et y

sont remplacés par une autre variable t, liée à x et y par l'équation

$$\varphi(x, y, t) = o,$$

on substituera aux dérivées partielles que (β) renferme leurs valeurs déterminées par les formules

$$(3)\ldots\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dt}\dfrac{dt}{dx}, \\ \dfrac{dz}{dy} = \dfrac{dz}{dt}\dfrac{dt}{dy}, \\ \dfrac{d^2z}{dx^2} = \dfrac{d^2z}{dt^2}\left(\dfrac{dt}{dx}\right)^2 + \dfrac{dz}{dt}\dfrac{d^2t}{dx^2}, \\ \text{etc.,} \end{array}\right.$$

après toutefois que, dans celles-ci, on aura remplacé $\frac{dt}{dx}$, $\frac{dt}{dy}$, $\frac{d^2t}{dx^2}$, etc. par les expressions que l'on trouve pour ces quantités en dérivant l'équation de liaison. — La question n'est susceptible de solution que si, en vertu de l'équation de liaison, l'expression finale peut être débarassée de x et de y.

Pour trouver ce que devient l'expression (β) quand les variables indépendantes x et y sont remplacées par deux autres variables indépendantes t et v, liées aux premières par les équations

$$\varphi_1(x, y, v, t) = o,$$
$$\varphi_2(x, y, v, t) = o,$$

dans les formules

$$(4)\ldots\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dv}\dfrac{dv}{dx} + \dfrac{dz}{dt}\dfrac{dt}{dx}, \\ \dfrac{dz}{dy} = \dfrac{dz}{dv}\dfrac{dv}{dy} + \dfrac{dz}{dt}\dfrac{dt}{dy}, \\ \text{etc.,} \end{array}\right.$$

on remplacera $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dt}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dt}{dy}$, etc., par leurs valeurs tirées

des équations de liaison, puis, dans (β), on portera les expressions qui en résulteront pour $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$, etc., ainsi que les valeurs de x et y en fonction de v et de t fournies par la résolution des équations $\varphi_1 = o$, $\varphi_2 = o$.

Remarque. — Si les équations de liaison fournissent directement ou aisément x et y en fonction de v et t, on partira des formules

$$(5) \quad \ldots \quad \begin{cases} \frac{dz}{dv} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dv} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dv}, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

On y remplacera $\frac{dx}{dv}, \frac{dy}{dv}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$, etc. par leurs valeurs données par la dérivation des équations de liaison, puis on en tirera les expressions de $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$, etc. Le problème s'achèvera comme précédemment.

Enfin, si l'on désire connaître ce que devient l'expression (β) quand x, y et la fonction z elle-même sont remplacées respectivement par t, v et u, variables liées aux premières par les équations

$$\begin{aligned} &\varphi_1(z, y, x, u, v, t) = o, \\ &\varphi_2(z, y, x, u, v, t) = o, \\ &\varphi_3(z, y, x, u, v, t) = o; \end{aligned}$$

dans les formules

$$(6) \quad \ldots \quad \begin{cases} \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dt}\frac{dt}{dx}; \\ \frac{du}{dy} = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dy} + \frac{du}{dt}\frac{dt}{dy}, \\ \text{etc.,} \end{cases}$$

on remplacera $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \frac{dt}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{dv}{dy}, \frac{dt}{dy}$, etc. par leurs valeurs tirées des équations de liaison, puis, des équations résultantes, on tirera les expressions de $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}$, etc. Restera à substituer dans (β) les valeurs de ces dérivées et celles de x, y, z en fonction de u, v, t fournies par la résolution des équations $\varphi_1 = o$, $\varphi_2 = o$, $\varphi_3 = o$.

Remarque. — Si les équations de liaison fournissent directement ou aisément x, y et z en fonction de u, v, t, on partira des formules

$$(7)\ldots\ldots \begin{cases} \frac{dz}{dv} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dv} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dv}, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt}, \\ \text{etc.,} \end{cases}$$

et l'on suivra une marche analogue à la précédente.

Si une expression renfermait trois variables indépendantes, questions et solutions semblables.

Exemple I.

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2} = o.$$

Que devient cette équation quand x et y sont remplacés par r, sachant que

$$x^2 + y^2 = r^2?$$

On a, formules (1) dans lesquelles t est remplacé par r,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dr}\frac{dr}{dx},$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dr}\frac{dr}{dy},$$

et, en dérivant l'équation de liaison,

$$x = r\frac{dr}{dx}, \quad \text{d'où} \quad \frac{dr}{dx} = \frac{x}{r},$$

$$y = r\frac{dr}{dy}, \quad \text{d'où} \quad \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}.$$

Substituant ces valeurs de $\frac{dr}{dx}$ et de $\frac{dr}{dy}$ dans les expressions de $\frac{dz}{dx}$ et de $\frac{dz}{dy}$, il vient

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dr}\frac{x}{r},$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dr}\frac{y}{r}.$$

Dérivant de nouveau, on a

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dr^2}\frac{dr}{dx}\cdot\frac{x}{r} + \frac{dz}{dr}\frac{1}{r} - \frac{dz}{dr}\frac{dr}{dx}\frac{x}{r^2},$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{d^2z}{dr^2}\frac{dr}{dy}\frac{y}{r} + \frac{dz}{dr}\frac{1}{r} - \frac{dz}{dr}\frac{dr}{dy}\frac{y}{r^2}.$$

Ou bien

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dr^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{dz}{dr}\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right),$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{d^2z}{dr^2}\frac{y^2}{r^2} + \frac{dz}{dr}\left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\right).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation proposée, elle devient

$$\frac{d^2z}{dr^2}\left(\frac{x^2 + y^2}{r^2}\right) + \frac{dz}{dr}\left(\frac{2}{r} - \frac{x^2 + y^2}{r^3}\right),$$

ou

$$\frac{d^2z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dz}{dr} = 0.$$

On rencontre cette équation dans la recherche du mouvement des fluides.

Exemple II.

$$x\frac{dz}{dy} - y\frac{dz}{dx}.$$

Que devient cette expression quand on remplace y et x par r et t, sachant que

$$x = r\cos t,$$
$$y = r\sin t?$$

On a, formules (5) dans lesquelles r est remplacé par r,

$$\frac{dz}{dr} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dr} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dr},$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt}.$$

La dérivation des équations de liaison donne d'autre part

$$\frac{dx}{dr} = \cos t, \qquad \frac{dy}{dr} = \sin t,$$
$$\frac{dx}{dt} = -r\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = r\cos t.$$

Substituant les valeurs de ces dérivées dans les équations précédentes, il vient

$$\frac{dz}{dr} = \frac{dz}{dx}\cos t + \frac{dz}{dy}\sin t,$$
$$\frac{dz}{dt} = -\frac{dz}{dx}r\sin t + \frac{dz}{dy}r\cos t.$$

Éliminant tour à tour $\frac{dz}{dy}$ et $\frac{dz}{dx}$ entre ces équations, on obtient

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dr}\cos t - \frac{dz}{dt}\frac{\sin t}{r},$$
$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dr}\sin t + \frac{dz}{dt}\frac{\cos t}{r}.$$

Par substitution, l'expression proposée devient donc

$$r\cos t\left(\frac{dz}{dr}\sin t+\frac{dz}{dt}\frac{\cos t}{r}\right)-r\sin t\left(\frac{dz}{dr}\cos t-\frac{dz}{dt}\frac{\sin t}{r}\right),$$

ou, après réduction, $\frac{dz}{dt}$.

Cette transformation se rencontre dans la théorie des planètes.

Exemple III.

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{1}{y^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2-e^z=o.$$

Que devient cette équation quand les variables z, y et x sont remplacées respectivement par u, v et t, sachant que

$$u=x^2+y^2,$$
$$v=x^2-y^2,$$
$$\log\frac{1}{2}t=z?$$

On a, formules (6),

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dt}\frac{dt}{dx},$$
$$\frac{du}{dy}=\frac{du}{dv}\frac{dv}{dy}+\frac{du}{dt}\frac{dt}{dy}.$$

En dérivant les équations de liaison par rapport à x d'abord, à y ensuite, on trouve

$$\frac{du}{dx}=2x,\quad \frac{dv}{dx}=2x,\quad \frac{dt}{dx}=2e^z\frac{dz}{dx},$$
$$\frac{du}{dy}=2y,\quad \frac{dv}{dy}=-2y,\quad \frac{dt}{dy}=2e^z\frac{dz}{dy}.$$

Substituant les valeurs de ces dérivées dans les deux équations précédentes, il vient

$$x=x\frac{du}{dv}+e^z\frac{dz}{dx}\frac{du}{dt},$$
$$y=-y\frac{du}{dv}+e^z\frac{dz}{dy}\frac{du}{dt}.$$

D'où

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x\left(1 - \frac{du}{dv}\right)}{e^z \frac{du}{dt}}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{y\left(1 + \frac{du}{dv}\right)}{e^z \frac{du}{dt}}.$$

Portant ces valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et de $\frac{dz}{dy}$ dans l'équation proposée, elle devient

$$\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^2\left(1 - \frac{du}{dv}\right)^2}{e^{2z}\left(\frac{du}{dt}\right)^2} + \frac{1}{y^2} \cdot \frac{y^2\left(1 + \frac{du}{dv}\right)^2}{e^{2z}\left(\frac{du}{dt}\right)^2} - e^z = o,$$

ou

$$\left(\frac{du}{dv}\right)^2 - \frac{e^{3z}}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 1 = o,$$

ou encore, puisque $e^z = \frac{1}{2}t$, en vertu de la troisième équation de liaison,

$$\left(\frac{du}{dv}\right)^2 - \frac{t^3}{16}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 1 = o.$$

Remarque. — Il y a souvent avantage à ne remplacer les variables par leurs valeurs en fonction des nouvelles que dans l'équation finale.

Exercices.

1. $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2$.

Que devient cette expression quand x et y sont remplacés par t, sachant que

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \log t?$$

On trouve $$t^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

2. $\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{d^2z}{dy^2}$.

Que devient cette expression quand x et y sont remplacés par t, sachant que

$$x^2 - y^2 = e^{2t}?$$

L'expression devient $\frac{1}{e^{2t}} \frac{d^2z}{dt^2}$.

3. $xy^3 \frac{d^2z}{dx^2} + 2x^2y^2 \frac{d^2z}{dx\,dy} + x^3y \frac{d^2z}{dy^2} - y^3 \frac{dz}{dx} - x^3 \frac{dz}{dy} = 0$.

Que devient cette équation quand x et y sont remplacés par t, sachant que

$$\sqrt{x^2 + y^2} = t?$$

On obtient $\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{1}{t} \frac{dz}{dt} = 0$.

4. $x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy}$.

Que devient cette expression quand x et y sont remplacés par t et r, sachant que

$$x = r \cos t,$$
$$y = r \sin t?$$

Le résultat est $r \frac{dr}{dt}$.

5. $\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2} = 0$.

Que devient cette équation quand x et y sont remplacés par t et r sachant que

$$x = r \cos t,$$
$$y = r \sin t?$$

On trouve $\frac{d^2z}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1}{r} \frac{dz}{dr} = 0$.

6. $y^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 - \frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\right] - x^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - \frac{dz}{dy}\frac{dz}{dx}\right] = o.$

Que devient cette équation quand x et y sont remplacés par t et v, sachant que

$$x = (t^2 + v^2)^2,$$
$$y = (t^2 - v^2)^2 ?$$

Le résultat est $v^3\left(\frac{dz}{dt}\right) - t^3\left(\frac{dz}{dv}\right) = o.$

7. $\left(x^3\frac{d^3z}{dx^3} + 3x^2\frac{d^2z}{dx^2} + x\frac{dz}{dx}\right)^2 - \left(y^3\frac{d^3z}{dy^3} + 3y^2\frac{d^2z}{dy^2} + y\frac{dz}{dy}\right)^2.$

Que devient cette expression quand y et x sont remplacés par v et t, sachant que

$$x = e^{v+t},$$
$$y = e^{v-t} ?$$

Elle devient $\frac{d^3z}{dv^3}\cdot\frac{d^3z}{dt^3}.$

8. $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = o.$

Que devient cette équation quand x, y, z sont remplacés par r, sachant que

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 ?$$

On trouve $\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = o.$

9. $$\frac{y - x}{\left(1 + \frac{dz}{dx}\right)\frac{dz}{dy} - \left(1 + \frac{dz}{dy}\right)\frac{dz}{dx}}.$$

Que devient cette expression quand z, y et x sont remplacés par u, v et t, sachant que

$$u = \log\sqrt{x^2 + y^2},$$
$$v = \text{arc tang}\, z,$$
$$t = x + y + z ?$$

Le résultat est $e^{2u}\left(\cos^2 v \frac{du}{dv} + \frac{du}{dt}\right)$.

10. $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = o.$

Que devient cette équation quand les variables indépendantes x, y, z sont remplacées par t, r, φ, sachant que

$$x = r\cos t,$$
$$y = r\sin t \sin\varphi,$$
$$z = r\sin t\cos\varphi\ ?$$

Soit posé $\rho = r\sin t$, ρ étant une variable auxiliaire.

On aura $\begin{cases} y = \rho\sin\varphi, \\ z = \rho\cos\varphi, \end{cases}$ et $\begin{cases} \rho = r\sin t, \\ x = r\cos t. \end{cases}$

et, d'après le résultat de l'exercice 5,

$$\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du}{d\rho} \quad . \quad . \quad (1),$$

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} \quad . \quad . \quad (2).$$

D'autre part, en suivant le procédé ordinaire (voir l'exemple II), on trouve

$$\frac{1}{\rho}\frac{du}{d\rho} = \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \frac{\cos t}{r^2}\frac{du}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Additionnant les équations (1), (2) et (3), il vient

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} + \frac{\cos t}{r^2}\frac{du}{dt}.$$

Substituant à ρ sa valeur, on trouve enfin pour ce que devient l'équation proposée

$$r\frac{d^2.(ur)}{dr^2} + \frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \frac{1}{\sin t}\frac{d.\left(\sin t\frac{du}{dt}\right)}{dt} = o.$$

Cette équation, due à Laplace, est importante en physique mathématique.

CHAPITRE VIII.

ÉLIMINATION DES CONSTANTES ET DES FONCTIONS.

Soit l'équation $F(x, y, a) = o$ . . . . (1),

renfermant la constante a.

Pour obtenir une équation différentielle qui ne contienne plus la constante, on dérive l'équation (1), puis on élimine a entre cette dérivée du premier ordre et l'équation proposée.

Si l'équation est de la forme

$$F(x, y, a, b) = o \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2),$$

c'est-à-dire renferme deux constantes a et b, on en cherche les dérivées première et deuxième, puis, entre ces dérivées et l'équation (2), on élimine a et b.

Et ainsi de suite.

Soit l'équation $F[x, y, z, \varphi(u)] = o$ . . . . . . (3),

φ désignant une fonction arbitraire de u, et u une fonction déterminée de x, y, z.

Pour obtenir une équation aux dérivées partielles qui ne renferme plus la fonction arbitraire, on dérive l'équation (3) par rapport à x et à y tour à tour, puis, entre ces dérivées et l'équation primitive, on élimine $\varphi(u)$ et $\varphi'(u)$.

Si l'équation renferme deux fonctions arbitraires de u et

de v, u et v désignant des fonctions déterminées des variables, c'est-à-dire si l'équation est de la forme

$$F\left[x, y, z, \varphi(u), \psi(v)\right] = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

on en cherche les dérivées partielles des deux premiers ordres, puis, entre ces dérivées et l'équation (4), on élimine $\varphi(u)$, $\psi(v)$, $\varphi'(u)$, $\psi'(v)$, $\varphi''(u)$ et $\psi''(v)$.

Et ainsi de suite.

Exemple I.

Éliminer a et b de l'équation de la sphère

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Les dérivées première et deuxième de l'équation sont

$$(x-a) + (y-b)\frac{dy}{dx} = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

$$1 + (y-b)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = o. \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

De (3), on tire

$$y - b = -\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

et, par substitution de cette valeur de $y - b$ dans (2),

$$x - a = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}} \frac{dy}{dx}.$$

Substituant dans (1) les valeurs de $x - a$ et de $y - b$, on trouve facilement

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = R.$$

C'est l'expression du rayon de courbure des courbes planes.

Exemple II.

Éliminer φ de l'équation

$$y - nz = \varphi(x - mz).$$

Les dérivées partielles de l'équation par rapport à x et à y, sont

$$-n\frac{dz}{dx} = \varphi'(x - mz)\left(1 - m\frac{dz}{dx}\right),$$

$$1 - n\frac{dz}{dy} = -\varphi'(x - mz)\,m\frac{dz}{dy}.$$

Divisant ces deux équations, membre à membre, on obtient après réductions

$$m\frac{dz}{dx} + n\frac{dz}{dy} = 1.$$

C'est l'équation différentielle des surfaces cylindriques.

Exemple III.

Éliminer φ et ψ de l'équation

$$z = x\varphi(z) + y\psi(z).$$

On a

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(z) + x\varphi'(z)\frac{dz}{dx} + y\psi'(z)\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{dz}{dy} = \psi(z) + y\psi'(z)\frac{dz}{dy} + x\varphi'(z)\frac{dz}{dy},$$

ou bien

$$\frac{dz}{dx}\left[1 - x\varphi'(z) - y\psi'(z)\right] = \varphi(z),$$

$$\frac{dz}{dy}\left[1 - x\varphi'(z) - y\psi'(z)\right] = \psi(z).$$

Divisant ces deux équations, membre à membre, il vient

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dz}{dy}} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.$$

Posant $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \mathrm{F}(z)$,

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dz}{dy}} = \mathrm{F}(z).$$

Différentiant de nouveau, tour à tour par rapport à x et à y, on obtient

$$\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dydx} = \mathrm{F}'(z)\frac{dz}{dx}\cdot\left(\frac{dz}{dy}\right)^2,$$

$$\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dxdy} - \frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dy^2} = \mathrm{F}'(z)\left(\frac{dz}{dy}\right)^2.$$

Multipliant respectivement ces équations par $\frac{dz}{dy}$ et $\frac{dz}{dx}$, puis soustrayant,

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\frac{d^2z}{dx^2} - 2\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dxdy} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\frac{d^2z}{dy^2} = 0,$$

équation différentielle des surfaces gauches à plan directeur.

Nota. — Généralement, pour abréger, on pose

$$\frac{dz}{dx} = p,\quad \frac{dz}{dy} = q,\quad \frac{d^2z}{dx^2} = r,\quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = s,\quad \frac{d^2z}{dy^2} = t.$$

En faisant usage de cette notation, les résultats des deux derniers exemples sont

$$mp + nq = 1,$$
$$q^2r - 2pqs + p^2t = 0.$$

Exercices.

1. Éliminer a de l'équation

$$y = ax + \frac{m}{a}.$$

On trouve

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} + m = 0.$$

2. Éliminer a de l'équation

$$x - y = ae^{-\frac{x}{x-y}}.$$

L'élimination fournit

$$x - 2y + y\frac{dy}{dx} = 0.$$

3. Éliminer $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ de l'équation

$$y = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + a_3 x^{n-2} + \ldots. + a_n x.$$

Le résultat est

$$y = x\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3} - \ldots.. \pm \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\frac{d^ny}{dx^n}.$$

4. Éliminer a, b et c de l'équation

$$z = ax + by + c,$$

y étant fonction de x.

On trouve

$$\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^3y}{dx^3} = 0,$$

équation de condition pour qu'une courbe à double courbure soit plane.

5. Éliminer a de l'équation

$$(am + n)(x^2 - ay^2) = ak^2.$$

On trouve

$$nxy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (mx^2 - ny^2 - k^2)\frac{dy}{dx} - mxy = 0.$$

6. Éliminer a et b de l'équation

$$y^2 = a(b^2 - x^2).$$

L'élimination donne

$$y\frac{dy}{dx} = x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy\frac{d^2y}{dx^2}.$$

7. Éliminer les fonctions logarithmique et circulaire de l'équation

$$y = \sin \log (x).$$

On obtient

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = o.$$

8. Éliminer les quantités exponentielles de l'équation

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Multipliant haut et bas par e^x et tirant de l'équation résultante la valeur de e^{2x}, puis celle de $2x$ en passant aux logarithmes, on arrive à une équation qui, dérivée, fournit

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2.$$

9. Éliminer les fonctions exponentielle et circulaire de l'équation

$$y = ae^{mx} \sin nx.$$

L'élimination faite, on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2m \frac{dy}{dx} + (m^2 + n^2)\, y = o.$$

10. Éliminer a, b, c, e et la fonction circulaire de l'équation

$$y = ae^x + be^{-x} + c \sin (x + m).$$

En dérivant quatre fois successivement, on trouve

$$\frac{d^4y}{dx^4} - y = o.$$

11. Éliminer φ de l'équation

$$\frac{y - b}{z - c} = \varphi\left(\frac{x - a}{z - c}\right).$$

On obtient

$$p(x - a) + q(y - b) = z - c,$$

équation différentielle des surfaces coniques.

12. Éliminer φ de l'équation

$$z = \varphi(x^2 + y^2).$$

Le résultat, équation différentielle des surfaces de révolution, est

$$py - qx = 0.$$

13. Éliminer φ de l'équation

$$z = \varphi\left(\frac{y^2 - x^2}{x}\right).$$

L'élimination fournit

$$2xy\frac{dz}{dx} + (x^2 + y^2)\frac{dz}{dy} = 0.$$

14. Éliminer φ de l'équation

$$z = \varphi\left(\frac{y - nz}{x - mz}\right).$$

On trouve

$$p(x - mz) + q(y - nz) = 0,$$

équation différentielle des surfaces conoïdes.

15. Éliminer φ de l'équation

$$z = \frac{1}{\varphi(x \pm ay)}.$$

On trouve

$$\frac{dz}{dy} \mp a\frac{dz}{dx} = 0.$$

16. Éliminer φ de l'équation

$$z^2 - xy = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

L'élimination donne

$$yz\frac{dz}{dy} + xz\frac{dz}{dx} - xy = 0.$$

17. Éliminer φ et ψ de l'équation

$$z = \frac{\varphi(x + ay)}{\psi(x - ay)}.$$

On obtient

$$q^2 + rt - a^2(p^2 + rz) = o.$$

18. Éliminer φ_1, φ_2, φ_3 de l'équation

$$u = \varphi_1(x^2 - y^2)\,\varphi_2(y^2 - z^2)\,\varphi_3(z^2 - x^2).$$

Le résultat de l'élimination est

$$yz\frac{du}{dx} + zx\frac{du}{dy} + xy\frac{du}{dz} = o.$$

19. Éliminer φ et ψ de l'équation

$$z = \varphi(x + ay) + \psi(x - ay).$$

On trouve

$$\frac{d^2z}{dy^2} - a^2\frac{d^2z}{dx^2} = o.$$

20. Éliminer φ et ψ de l'équation

$$z = x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y^n\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Il vient

$$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = nz.$$

C'est l'équation différentielle des fonctions homogènes du n[ème] degré.

21. Éliminer φ et ψ de l'équation

$$z = x\varphi(xy) + y\psi(xy).$$

On trouve

$$t^2y^2 + r^2x^2 - 2sxy + qy + px = z.$$

22. Éliminer φ et ψ de l'équation

$$z = \varphi(ay + bx)\,\psi(ay - bx).$$

Prenant les logarithmes, il vient

$$\log z = \log\varphi(ay + bx) + \log\psi(ay - bx).$$

Les fonctions φ et ψ étant arbitraires, leurs logarithmes

le sont aussi ; on peut donc poser, F et f représentant des fonctions arbitraires,

$$\log\varphi(ay + bx) = F(ay + bx),$$
$$\log\psi(ay - bx) = f(ay - bx).$$

D'où

$$\log z = F(ay + bx) + f(ay - bx).$$

Éliminant F et f, on obtient

$$a^2\left(r^2 - \frac{1}{z}p^2\right) - b^2\left(t^2 - \frac{1}{z}q^2\right) = 0.$$

23. Éliminer φ, ψ et χ de l'équation

$$x\varphi(u) + y\psi(u) + z\chi(u) = 1,$$

sachant que u est une fonction de x, y, z donnée par l'équation

$$x\varphi'(u) + y\psi'(u) + z\chi'(u) = 0.$$

On obtient

$$r^2t^2 - s^2 = 0,$$

équation des surfaces développables.

CHAPITRE IX.

DÉTERMINATION DES FONCTIONS QUI, POUR CERTAINES VALEURS DE LA VARIABLE, DEVIENNENT INDÉTERMINÉES.

Soit $\frac{F(x)}{f(x)}$ une fraction dont les termes sont des fonctions de x.

Quand, pour $x = x_0$, cette fraction devient $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, sa vraie valeur est $\frac{F'(x_0)}{f'(x_0)}$; c'est-à-dire le quotient des dérivées des deux fonctions, après que dans ce quotient on a remplacé

x par x_0. Si $F'(x_0)$ et $f'(x_0)$ sont nulles ou infinies, la vraie valeur est $\frac{F''(x_0)}{f''(x_0)}$; si $F''(x_0)$ et $f''(x_0)$ sont encore nulles ou infinies, cette valeur est $\frac{F'''(x_0)}{f'''(x_0)}$, et ainsi de suite.

La méthode est en défaut quand, pour $x = x_0$, toutes les dérivées de $F(x)$ et de $f(x)$ deviennent nulles ou infinies. Dans ce cas d'exception, après avoir remplacé x par $x_0 + h$ dans la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$, on développe haut et bas, puis, dans le quotient simplifié, on fait $h = o$. Le résultat est la valeur cherchée.

D'autres systèmes de fonctions se présentant sous d'autres formes indéterminées, pour certaines valeurs de la variable qu'elles renferment, peuvent s'écrire de manière que, pour $x = x_0$, ils soient ramenés à l'une des formes $\frac{o}{o}, \frac{\infty}{\infty}$. La vraie valeur se détermine alors de la même manière.

Ainsi, soit $F(x).f(x)$ un système tel que, pour $x = x_0$, $F(x)$ devienne infinie et $f(x)$ nulle, ce qui donne un produit de la forme $\infty \times o$. On a

$$F(x).f(x) = \frac{F(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{f(x)}{\frac{1}{F(x)}},$$

et ces deux dernières formes du produit proposé deviennent $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{o}{o}$ quand $x = x_0$. Donc détermination de la vraie valeur comme précédemment.

Ainsi encore, soit $F(x) - f(x)$ une expression qui, pour $x = x_0$, donne $\infty - \infty$. Posant

$$F(x) = \frac{1}{F_1(x)} \text{ et } f(x) = \frac{1}{f_1(x)},$$

$F_1(x)$ et $f_1(x)$ étant des fonctions qui deviennent nulles pour $x = x_0$, on a

$$F(x) - f(x) = \frac{1}{F_1(x)} - \frac{1}{f_1(x)} = \frac{f_1(x) - F_1(x)}{F_1(x)\, f_1(x)}$$

et l'expression finale devient $\frac{0}{0}$ pour $x = x_0$.

Enfin, quand une expression de la forme $F(x)^{f(x)}$ devient $0^0, \infty^0, 1^\infty$, etc., pour certaine valeur de x, il suffit de prendre le logarithme de l'expression et d'en chercher la vraie valeur v; e^v sera celle de $F(x)^{f(x)}$.

Exemple I.

Soit la fraction

$$\frac{x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9}{x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9}$$

qui, pour $x = 3$, devient $\frac{0}{0}$.

La dérivée du numérateur sur celle du dénominateur est

$$\frac{4x^3 - 24x^2 + 44x - 24}{4x^3 - 12x^2 - 4x + 12}$$

ou

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^3 - 3x^2 - x + 3}$$

et ce quotient devient encore $\frac{0}{0}$ pour $x = 3$.

Dérivant de nouveau haut et bas, on obtient

$$\frac{3x^2 - 12x + 11}{3x^2 - 6x - 1}$$

quotient qui, pour $x = 3$, devient $\frac{1}{4}$. C'est la vraie valeur de la fraction proposée pour $x = 3$.

Exemple II.

Supposons que l'on demande la vraie valeur de $\frac{(x-a)^{\frac{1}{m}}}{(x^2-a^2)^{\frac{1}{n}}}$ pour $x = a$, sachant d'ailleurs que m et n sont des nombres entiers positifs et $m < n$.

Il est facile de voir que, pour $x = a$, la fraction proposée devient $\frac{o}{o}$ et les rapports des dérivées des deux termes tous infinis. Posant donc $x = a + h$ dans la fraction, elle devient

$$\frac{h^{\frac{1}{m}}}{\left[(a+h)^2 - a^2\right]^{\frac{1}{n}}} = \frac{h^{\frac{1}{m}}}{h^{\frac{1}{n}}(2a+h)^{\frac{1}{n}}} = \frac{h^{\frac{n-m}{mn}}}{(2a+h)^{\frac{1}{n}}}$$

et, pour $h = o$, donne o. La vraie valeur de la fraction proposée, pour $x = a$, est donc nulle.

Exemple III.

Soit à chercher la vraie valeur de $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\tang x$, pour $x = \frac{\pi}{2}$.

Pour cette valeur particulière de x, l'expression proposée devient $o \times \infty$; mais en l'écrivant sous la forme

$$\frac{\frac{\pi}{2} - x}{\frac{1}{\tang x}} = \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cotg x},$$

elle devient $\frac{o}{o}$ pour la même valeur particulière.

Le quotient des dérivées des deux termes est

$$\frac{-1}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \sin^2 x = 1, \text{ quand } x = \frac{\pi}{2}.$$

La vraie valeur cherchée est donc 1.

Si l'on avait écrit l'expression sous la forme

$$\frac{\tang x}{\frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}},$$

elle fut devenue $\frac{\infty}{\infty}$ pour $x = \frac{\pi}{2}$,

et le rapport des dérivées des deux termes eût été

$$\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}} = \frac{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}{\cos^2 x} = \frac{o}{o}, \text{ pour } x = \frac{\pi}{2}.$$

Or, la vraie valeur de $\dfrac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}$, fraction qui, pour $x=\dfrac{\pi}{2}$, devient aussi $\dfrac{o}{o}$, est égale au rapport des dérivées des deux termes de $\dfrac{1}{\sin x}$ dans lequel on aurait remplacé x par $\dfrac{\pi}{2}$, c'est-à-dire à

$$\frac{1}{\sin\dfrac{\pi}{2}} = 1.$$

Donc la vraie valeur de $\dfrac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x} \times \dfrac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x} = 1 \times 1 = 1.$

Exemple IV.

Vraie valeur de $(1+mx)^{\frac{1}{x}}$ pour $x = o$.

$$(1+mx)^{\frac{1}{x}} \text{ devient, pour } x = o,\ 1^{\infty}.$$

Mais

$$\log(1+mx)^{\frac{1}{x}} = \frac{\log(1+mx)}{x},$$

expression qui, pour $x=o$, donne $\dfrac{o}{o}$.

Le quotient des dérivées des deux termes de la dernière fraction est d'ailleurs $\dfrac{m}{1+mx}$ et devient m pour $x = o$.

Donc la vraie valeur de $\log(1+mx)^{\frac{1}{x}} = m$.

Et, par suite, celle de $(1+mx)^{\frac{1}{x}} = e^m$.

Exercices.

1. $\dfrac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^3 - x^2 - 5x + 3}$, pour $x = 3$.

La vraie valeur est $\dfrac{1}{4}$.

2. $\dfrac{x^3 - 4ax^2 + 5a^2x - 2a^3}{x^3 - 3a^2x - 2a^3}$, pour $x = 2a$.

La vraie valeur est $\dfrac{1}{9}$.

3. $\dfrac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px}$, pour $x = o$.

La vraie valeur est $\dfrac{1}{p}$.

4. $\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin 2x - \cos 2x - 1}$, pour $x = \dfrac{\pi}{4}$.

La vraie valeur est $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$.

5. $\dfrac{1 - 6x^2 + 5x^4}{1 - 4x^2 - 5x^4}$, pour $x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

La vraie valeur est $\dfrac{2}{3}$.

6. $\dfrac{\cot x + \operatorname{cosec} x - 1}{\cot x - \operatorname{cosec} x + 1}$, pour $x = \dfrac{\pi}{2}$.

La vraie valeur est 1.

7. $\dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$, pour $x = o$.

La vraie valeur est $\dfrac{1}{2}$.

8. $\dfrac{a\sqrt{ax} - x^2}{a - \sqrt{ax}}$, pour $x = a$.

La vraie valeur est $3a$.

9. $\dfrac{\sqrt{a^2+ax+x^2}-\sqrt{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$, pour $x=o$.

La vraie valeur est $\sqrt{a}$.

10. $\dfrac{a^{\log x}-x}{\log x}$, pour $x=1$.

La vraie valeur est $\log a - 1$.

11. $\dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}}$, pour $x=o$.

La vraie valeur est 1.

12. $\dfrac{xe^{2x}-e^{2x}-x+1}{e^{2x}-1}$, pour $x=o$.

La vraie valeur est -1

13. $\dfrac{e^x-e^{-x}}{\log(1+x)}$, pour $x=o$.

La vraie valeur est .

14. $\dfrac{\cos ax-\cos an}{n^2-x^2}$, pour $x=n$.

La vraie valeur est $\dfrac{a\sin an}{2n}$.

15. $\left(\dfrac{\sin mx}{\sin x}\right)^2$, pour $x=o$,

m étant un nombre entier.

On trouve m^2 pour vraie valeur.

16. $\dfrac{1-\cos x}{x\log(1+x)}$, pour $x=o$.

On obtient $\frac{1}{2}$ pour vraie valeur.

17. $\dfrac{e^{mx}-e^{ma}}{(x-a)^n}$, pour $x=a$.

Au moyen de n dérivations, on parvient à $\dfrac{m^n e^{ma}}{1.2.3\ldots n}$ pour vraie valeur.

18. La somme de la série

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$$

est $$\frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2};$$

quelle est la valeur de cette somme quand $x = 1$?

On obtient $\frac{n(n+1)}{2}$, somme des nombres naturels.

19. $\frac{x + x^3 - (2n+1)x^{2n+1} + (2n-1)x^{2n+3}}{(1-x^2)^2}$, pour $x = 1$,

La vraie valeur est n^2.

20. La série

$$x + 4x^2 + 9x^3 + \ldots + n^2x^n$$

a pour somme

$$\frac{x + x^2 - (n+1)x^{n+1} + (2n^2+2n-1)x^{n+2} - n^2x^{n+3}}{(1-x)^3};$$

quelle est la valeur de cette somme pour $x = 1$?

La valeur cherchée est

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

somme des carrés des nombres naturels.

21. $\frac{x^3 - 4ax^2 + 7a^2x - 2a^3 - 2a^2\sqrt{2ax - a^2}}{x^2 - 2ax - a^2 + 2a\sqrt{2ax - x^2}}$, pour $x = a$.

En ayant recours à quatre dérivations successives, on trouve que la vraie valeur est $-5a$. (Euler.)

22. $\frac{(x^2 + a^2)(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{(3x^3 - a^2x)(x^3 - a^3)^{\frac{3}{2}}}$, pour $x = a$.

Remplaçant x par $a + h$ (exemple II), on trouve $\frac{2\sqrt{2}}{3a^2\sqrt{3a}}$ pour vraie valeur.

23. $\dfrac{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + (a - x)}{(a - x)^{\frac{1}{2}} + (a^3 - x^3)^{\frac{1}{2}}}$, pour $x = a$.

Remplaçant x par $a - h$ et suivant le procédé indiqué, on obtient pour la vraie valeur

$$\frac{\sqrt{2a}}{1 + 3a\sqrt{3}}.$$

24. $\dfrac{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{3}} + (a - x)^{\frac{2}{3}}}{(a - x)^{\frac{1}{3}} - (a^3 - x^3)^{\frac{1}{3}}}$, pour $x = a$.

Remplaçant x par $a - h$, on trouve que la vraie valeur est

$$\frac{\sqrt[3]{2a}}{1 - \sqrt[3]{3a^2}}.$$

25. $\dfrac{\text{tang}\,\pi x - \pi x}{2x^2 \,\text{tang}\,\pi x}$, pour $x = o$.

Posant $x = o + h$, développant par la formule trouvée (exercice 5, chapitre VI, section II), puis faisant $h = o$, on trouve pour vraie valeur $\dfrac{\pi^2}{6}$.

26. $\dfrac{x^m - x^{m+n}}{1 - x^{2p}}$, pour $x = 1$.

L'expression proposée peut s'écrire

$$\frac{x^m}{1 + x^p} \cdot \frac{1 - x^n}{1 - x^p}$$

et, pour $x = 1$, le premier facteur devient $\dfrac{1}{2}$ et le second, $\dfrac{o}{o}$. La vraie valeur de ce second facteur est $\dfrac{n}{p}$ et par conséquent celle de l'expression donnée, $\dfrac{n}{2p}$.

27. $\dfrac{\cos ax - \cos an}{(n^2 - x^2)^m}$, pour $x = n$.

Cette expression peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{(n + x)^m} \cdot \frac{\cos ax - \cos an}{(n - x)^m}$$

et, pour $x = n$, le premier facteur est $\frac{1}{(2n)^m}$; le second, $\frac{o}{o}$. Au moyen de m dérivations, on trouve que la vraie valeur de ce second facteur est

$$(-1)^m \frac{a^m \cos\left(an + \frac{1}{2}m\pi\right)}{1.2.3....m}$$

et, par suite, celle de l'expression proposée,

$$(-1)^m \frac{a^m \cos\left(an + \frac{1}{2}m\pi\right)}{(2n)^m.1.2.3....m}.$$

28. $\frac{x^m}{e^x}$, pour $x = \infty$.

Après avoir dérivé m fois, on trouve $\frac{1.2.3....m}{e^x} = o$ pour vraie valeur.

29. $\frac{\log x}{x^m}$, pour $x = \infty$.

La vraie valeur est o.

30. $\left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) \operatorname{tang} x$, pour $x = \frac{\pi}{2}$.

Forme de l'indétermination, $o \times \infty$; vraie valeur, $\frac{2}{\pi}$.

31. $\sec \frac{\pi x}{2} \log \frac{1}{x}$, pour $x = 1$.

Forme de l'indétermination, $\infty \times o$; vraie valeur, $\frac{2}{\pi}$.

32. $2^x \sin \frac{a}{2^x}$, pour $x = \infty$.

Forme de l'indétermination, $\infty \times o$. La vraie valeur est a.

33. $\sqrt{a^2 - x^2} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{\frac{1}{2}}$, pour $x = a$.

L'expression proposée donne d'abord $o \times \infty$, mais on peut l'écrire

$$\frac{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}}{\tang \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}} \times \frac{2}{\pi}(a+x).$$

Pour $x = a$, la limite du premier facteur est 1 ; la valeur du second, $\frac{4a}{\pi}$. La vraie valeur est donc aussi $\frac{4a}{\pi}$.

34. $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}$, pour $x = 1$.

L'expression, pour $x = 1$, devient $\infty - \infty$, mais en réduisant au même dénominateur, ce qui donne

$$\frac{x \log x - x + 1}{(x-1)\log x},$$

elle devient $\frac{o}{o}$, et fournit $\frac{1}{2}$ pour vraie valeur.

35. La somme de la série

$$\frac{1}{1^2 + x^2} + \frac{1}{2^2 + x^2} + \frac{1}{3^2 + x^2} + \text{etc.}$$

est

$$\frac{\pi x - 1}{2x^2} + \frac{\pi}{x(e^{2\pi x} - 1)};$$

quelle est la valeur de cette somme pour $x = o$?

Pour $x = o$, l'expression devient $\infty - \infty$.

En opérant comme dans l'exercice précédent, on trouve que la vraie valeur est $\frac{\pi^2}{6}$, somme des réciproques des carrés des nombres naturels. (Euler.)

36. $\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x} - 1)}$, pour $x = o$.

C'est la somme de la série

$$\frac{1}{1^2+x^2}+\frac{1}{3^2+x^2}+\frac{1}{5^2+x^2}+\text{etc.}$$

Pour $x=o$, l'expression devient $\infty-\infty$, mais, en opérant comme dans l'exercice 34, on trouve pour vraie valeur $\frac{\pi^2}{8}$, somme des réciproques des carrés des nombres impairs.

(Euler.)

37. $\left(\frac{1}{x^n}\right)^{x^m}$, pour $x=o$.

Forme de l'indétermination, ∞^o.

On a $$\log\left(\frac{1}{x^n}\right)^{x^m}=-nx^m\log x=-n\frac{\log x}{\frac{1}{x^m}},$$

expression dont la vraie valeur, pour $x=o$, est o.

Donc $\left(\frac{1}{x^n}\right)^{x^m}$, pour $x=o$, est $e^o=1$.

38. $\cos x^{\cos x}$, pour $x=\frac{\pi}{2}\cdot$

Forme de l'indétermination, o^o.

En employant les logarithmes, on trouve 1 pour vraie valeur.

39. $\operatorname{tang} x^{\operatorname{tang} 2x}$, pour $x=\frac{\pi}{4}\cdot$

Forme de l'indétermination, 1^∞.

Vraie valeur, $\frac{1}{e}\cdot$

40. Vraies valeurs du $\frac{dy}{dx}$, pour $x=o$ et $y=o$, dans l'équation.

$$y^4-a^2y^2+2a^2x^2-x^4=o.$$

Valeurs cherchées, $\pm\sqrt{2}$.

41. Vraies valeurs du $\frac{dy}{dx}$ tiré de l'équation

$$(y^2 + ax)^2 = x^2(a^2 + 2ax - x^2),\ \text{quand } x = o \text{ et } y = o.$$

Valeurs cherchées, ± 1 et ∞.

CHAPITRE X.

MAXIMA ET MINIMA.

SECTION I. — *Fonctions explicites d'une seule variable indépendante.*

Soit $y = F(x)$ une fonction explicite de x.

Toute racine réelle de l'équation $F'(x) = o$, à moins que cette racine n'annulle $F''(x)$, est une valeur de x correspondante à un maximum ou à un minimum de y : à un maximum quand, pour la valeur de x trouvée, $F''(x)$ est $< o$; à un minimum quand, pour la même valeur, $F''(x)$ est $> o$.

Dans le cas où $F''(x) = o$, il n'y a maximum ou minimum que si, pour la valeur de x trouvée, $F'''(x) = o$ et que, pour la même valeur, on n'ait pas $F^{\text{iv}}(x) = o$. Maximum, si l'on trouve $F^{\text{iv}}(x) < o$; minimum, si l'on obtient $F^{\text{iv}}(x) > o$.

Et ainsi de suite,

Cette règle générale suppose la continuité de $F(x)$ et de ses dérivées dans le voisinage de la valeur de x fournie par l'équation $F'(x) = o$.

Les cas d'exception sont peu importants dans les applications.

Exemple.

Soit $$y = x^5 - ax^4 + b.$$
On a $$F(x) = x^5 - ax^4 + b.$$
Et, en dérivant deux fois de suite,
$$F'(x) = 5x^4 - 4ax^3,$$
$$F''(x) = 20x^3 - 12ax^2.$$
Les racines de l'équation $F'(x) = o$ ou de $x^3(5x - 4a) = o$ sont $\frac{4a}{5}$ et o.

En substituant $\frac{4a}{5}$ dans l'expression de $F''(x)$, on trouve $\frac{64}{25}a^3$.

Cette racine correspond donc à un minimum de y.

Ce minimum est $y = b - \frac{a}{5}\left(\frac{4a}{5}\right)^4$.

Quant à la racine o, elle annulle l'expression de $F''(x)$, mais la dérivation fournit
$$F'''(x) = 60x^2 - 24ax,$$
$$F^{\text{IV}}(x) = 120x - 24a,$$
et l'on voit que, pour $x = o$, $F'''(x) = o$, tandis que $F^{\text{IV}}(x) = -24a$. La racine o correspond donc à un maximum de y. Ce maximum est $y = b$.

Exercices.

1. $y = x^3 - 12x^2 + 45x + 30.$
   Pour $x = 5$, y est minimum;
   pour $x = 3$, maximum.
2. $y = x^5 - 75x^3 + 1620x - 1000.$
   Pour $x = 6$, y est minimum;
   pour $x = -6$, maximum;
   pour $x = 3$, maximum;
   pour $x = -3$, minimum.

3. $y = 10x^6 - 12x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 20.$

Pour $x = 1$, $y = 13$, minimum.
Pour $x = 0$, ni maximum, ni minimum.

4. $y = \dfrac{1 - x}{(1 + x)^2}.$

Pour $x = 3$, y est minimum.

5. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}.$

Pour $x = \sqrt{2}$, $y = 12\sqrt{2} - 17$, minimum.
Pour $x = -\sqrt{2}$, $y = -12\sqrt{2} - 17$, maximum.

6. $y = \dfrac{a + x}{a^2 + x^2}.$

Dérivant, on a $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a^2 - 2ax - x^2}{(a^2 + x^2)^2}.$

Pour que cette dérivée soit nulle, il faut donc que

$$a^2 - 2ax - x^2 = o,$$

équation dont les racines sont

$$x' = +a(\sqrt{2} - 1),$$
$$x'' = -a(\sqrt{2} + 1).$$

Pour savoir si chacune des racines correspond à un maximum ou à un minimum, il suffit de dériver le numérateur de $\dfrac{dy}{dx}$, car le dénominateur, toujours positif, n'influera pas sur le signe de la dérivée seconde.

Or $$\frac{d.(a^2 - 2ax + x^2)}{dx} = -2a - 2x.$$

En substituant les valeurs de x' et de x'' dans ce résultat, on voit facilement que

pour $x' = a(\sqrt{2} - 1)$, y est maximum;
pour $x'' = -a(\sqrt{2} + 1)$, minimum.

7. $y = \dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2+x^2}$.

En opérant comme dans l'exercice précédent, on trouve que

pour $x = 1$, $y = 2$ est maximum;
pour $x = -1$, $y = -2$, minimum.

8. $y = \dfrac{x^3 - x}{x^4 - x^2 + 1}$.

La remarque faite dans l'exercice 6 peut encore s'appliquer et l'on trouve

pour $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $y = \dfrac{1}{2}$, maximum;

pour $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $y = -\dfrac{1}{2}$, minimum.

9. $y = \dfrac{(a+x)(b+x)}{(a-x)(b-x)}$.

Pour $x = \sqrt{ab}$, $y = -\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2$, minimum;

pour $x = -\sqrt{ab}$, $y = -\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2$, maximum.

10. $y = \left(x^{\frac{1}{2}} - 1\right)\left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right)$.

En posant $x^{\frac{1}{6}} = z$, on trouve

pour $z = 0$, $y = 1$, maximum;
$z = 1$, $y = 0$, minimum.

11. $y = x\sqrt{ax - x^2}$.

Pour $x = \dfrac{3a}{4}$, $y = \dfrac{3\sqrt{3}}{16}a^2$, maximum.

12. $y = \pm x\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$. (Strophoïde.)

Pour $x = -a\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, y est maximum.

13. $y = \dfrac{\sqrt{(1+x)+2a\sqrt{x}}+\sqrt{(1+x)-2a\sqrt{x}}}{\sqrt{(1+x)+2a\sqrt{x}}-\sqrt{(1+x)-2a\sqrt{x}}}$.

Pour $x = 1$, $y = \dfrac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}$, minimum.

14. $y = \dfrac{x}{\log x}$.

Pour $x = e$, $y = e$, minimum.

15. $y = \dfrac{\sin^2 mx}{\sin^2 x}$.

Les valeurs de x fournies par l'équation $\sin x = o$ rendent y maximum; celles fournies par l'équation $\sin mx = o$ rendent y minimum et celles données par l'équation $m \tan x = \tan mx$ rendent y maximum.

16. $y = \dfrac{e^x}{\sin(x-a)}$.

Pour $x = a + \dfrac{\pi}{4}$, $y = \sqrt{2}\,.\,e^{a+\frac{\pi}{4}}$, minimum;

pour $x = a + \dfrac{5\pi}{4}$, $y = -\sqrt{2}\,.\,e^{a+\frac{5\pi}{4}}$, maximum.

17. $y = \sin x \cos(a-x)$.

Pour $x = \dfrac{a}{2} + \dfrac{\pi}{4}$, $y = \dfrac{1+\sin a}{2}$, maximum;

pour $x = \dfrac{a}{2} - \dfrac{\pi}{4}$, $y = -\dfrac{1-\sin a}{2}$, minimum.

18. $y = a^{x+1} - a^x - x$.

Pour $x = \dfrac{\log[(a-1)\log a]}{\log a}$, y est maximum ou minimum selon que a est $>$ ou < 1.

19. $y = \tan^m x\,.\,\tan^n(a-x)$.

Pour $\tan(a-2x) = \dfrac{n-m}{n+m}\tan a$, y est maximum.

20. Trouver le nombre x dont la racine $x^{ème}$ est un maximum.

On aura à chercher le maximum de $y = x^{\frac{1}{x}}$; on trouve facilement que pour $x = e$, $y = e^{\frac{1}{e}}$, maximum.

21. Une droite et une parallèle à cette droite étant données, trouver sur la parallèle un point tel que les droites menées de ce point aux extrémités de la droite donnée fassent entre elles un angle maximum.

Soient B et C les extrémités de la droite donnée (*); A le point cherché pris sur une parallèle à cette droite. Joignons le point A aux points B et C et, de A, menons sur BC la perpendiculaire AD. En posant BC $= b$, AD $= h$, BD $= x$, on trouve que l'angle BAC a pour expression

$$\frac{bh}{h^2 - bx + x^2}$$

dont le maximum correspond à $x = \frac{b}{2}$.

22. Les côtés égaux et l'une des bases d'un trapèze isocéle étant donnés, déterminer l'autre base de sorte que l'aire du trapèze soit maximum.

Soient ABCD un trapèze; AB la plus grande des bases, DC l'autre, AD l'un des côtés égaux. Si, du point D, on mène DP perpendiculaire sur AB et que l'on pose

$$DC = a, \quad AD = BC = b, \quad AP = x,$$

on trouve que l'expression de la surface du trapèze est

$$(a + x)\sqrt{b^2 - x^2}$$

dont le maximum correspond à

$$x = -\frac{a}{4} + \frac{\sqrt{a^2 + 8b^2}}{4}.$$

(*) Le lecteur est prié de construire une figure d'après les indications données et d'agir de même dans les autres problèmes du recueil.

Chercher ce que devient la surface dans chacun des cas suivants :

1° $x = -\frac{a}{4} - \frac{\sqrt{a^2 + 8b^2}}{4}$.

2° $a = b$.

3° $a > b$.

Si $a = o$, le trapèze se change en triangle; maximum pour $x = \frac{b}{\sqrt{2}}$.

(Maupertuis.)

23. Inscrire le plus grand rectangle possible dans un segment de cercle donné.

En représentant par r le rayon du cercle, par a la distance du centre à la corde du segment et par x le côté du rectangle perpendiculaire à cette corde, on obtient pour expression de la surface du rectangle

$$2x\sqrt{r^2 - (a + x)^2}.$$

Pour $x = \frac{\sqrt{9a^2 + 8(r^2 - a^2)} - 3a}{4}$, cette surface est maximum.

Si $a = o$, la valeur de x correspondant au maximum est $\frac{r}{\sqrt{2}}$ et la surface du cercle, r^2.

24. Partager le nombre a en deux parties, de sorte que le produit de la $m^{\text{ème}}$ puissance de l'une par la $n^{\text{ème}}$ puissance de l'autre soit un maximum.

$y = x^m (a - x)^n$ étant la traduction algébrique du problème, on trouve que, pour $x = \frac{ma}{m + n}$, y est maximum.

25. Trouver à quelle hauteur d'un plan un point lumineux doit être placé pour qu'un élément infiniment petit de ce plan, situé à une distance donnée de la projection du point lumineux sur le plan, reçoive le plus de clarté possible.

Soient L le point lumineux, A sa projection sur le plan, P l'élément plan, situé à la distance donnée AP de la projection A. En joignant deux à deux ces trois points, le triangle qu'on obtient, LPA, est rectangle en A et, en posant $AP = a$, l'angle $LPA = x$; désignant par I l'intensité du point lumineux, par $F(x)$ la quantité de lumière projetée sur l'élément plan, on trouve en vertu des lois de l'intensité

$$F(x) = \frac{I}{a^2} \sin x \cos^2 x.$$

Pour $\tang x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient $F(x) = \frac{2I}{3\sqrt{3}\,.\,a^2}$, maximum.

26. Sous quel angle doit-on mesurer une hauteur pour que l'erreur commise dans la mesure soit minimum?

Soient MP la hauteur à mesurer et, dans le plan horizontal passant par le pied P, O le point d'où l'on observe cette hauteur. Tirons OP et OM, puis, sur le prolongement de MP, de P vers M, marquons un point M′ à une distance infiniment petite de M. Enfin menons OM′ et, sur cette droite, du point M, la perpendiculaire MK.

Soient $MP = h$, l'angle $MOP = x$, $M'OM = \Delta x$, $MM' = \Delta h$.

A la limite, le triangle MM′K donne

$$KM = \Delta h.\cos x \text{ ou } \frac{h}{\sin x}\,\Delta x = \Delta h.\cos x.$$

D'où
$$\Delta h = \frac{h}{\sin x \cos x}\,\Delta x.$$

Le minimum de Δh sera fourni par le minimum de $\frac{h}{\sin x \cos x}\,\Delta x$ ou par le maximum de $\sin x \cos x$, puisque h et Δx sont constants.

Pour $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, l'expression $\sin x \cos x$ est maximum. La base d'opération, dans la mesure, doit donc être prise, autant que possible, égale à la hauteur à mesurer.

27. Trouver la plus petite ellipse que l'on puisse circonscrire à un trapèze donné.

Soient $2a$ et $2a'$ les côtés parallèles du trapèze, $2a$ le plus petit; $2y$ et $2y'$ deux diamètres conjugués de l'ellipse, faisant entre eux l'angle θ; le premier, mené par les milieux des côtés $2a$ et $2a'$. Enfin, soient c la portion du diamètre $2y$ comprise entre les côtés parallèles du trapèze et x la partie comprise entre le centre de l'ellipse et le côté $2a$.

On aura

$$a^2 = \frac{y'^2}{y^2}(y^2 - x^2),\quad a'^2 = \frac{y'^2}{y^2}\left[y^2 - (c-x)^2\right].$$

Et en posant $\dfrac{a'^2 - a^2}{c} = e$ et $\dfrac{y^2}{y'^2} = z$,

$$x = \frac{ez + c}{2},$$

$$y = \frac{\sqrt{c^2 + e^2z^2 + z(4a^2 + 2ec)}}{2},$$

$$y' = \frac{\sqrt{c^2 + e^2z^2 + z(4a^2 + 2ec)}}{2\sqrt{z}}.$$

L'expression de la surface de l'ellipse est $\pi \sin\theta\, yy'$, ou en substituant les valeurs de y et de y',

$$\frac{\pi \sin\theta}{4} \cdot \frac{c^2 + e^2z^2 + z(4a^2 + 2ec)}{\sqrt{z}}.$$

Pour $z = \dfrac{\left[2\sqrt{a'^4 - a'^2a^2 + a^4} - (a'^2 + a^2)\right]c^2}{3(a'^2 - a^2)^2}$

ou pour $x = \dfrac{\left[a'^2 - 2a^2 + \sqrt{a'^4 - a'^2a^2 + a^4}\right]c}{3(a'^2 - a^2)}$,

le minimum de la surface est

$$\frac{2\pi c \sin\theta\left[a'^4 - 4a'^2a^2 + a^4 + (a'^2 + a^2)\sqrt{a'^4 - a'^2a^2 + a^4}\right]}{3\sqrt{3(a'^2 - a^2)}\sqrt{2\sqrt{a'^4 - a'^2a^2 + a^4} - (a'^2 + a^2)}}.$$

Si $a' = a$, le trapèze devient un parallélogramme et l'expression de la surface devient $\frac{o}{o}$. Dans ce cas, il faut chercher la vraie valeur : on trouve $\pi ac \sin \theta$. (Bossut.)

Section II. — *Fonctions implicites d'une seule variable indépendante.*

Soit y une fonction implicite de x déterminée par l'équation $F(x, y) = o$.

L'équation $\frac{dF}{dx} = o$ fournira, simultanément avec la proposée, les valeurs de x qui correspondent aux maxima et aux minima, et aussi ces maxima et ces minima eux-mêmes.

La substitution dans l'expression $\frac{\frac{d^2F}{dx^2}}{\frac{dF}{dy}}$ de chaque couple de valeurs trouvées pour x et y, déterminera un maximum ou un minimum de y, selon que le résultat de l'opération sera positif ou négatif.

Cette règle, pour être complète, doit recevoir des développements et des restrictions analogues à ceux qui ont été indiqués dans le cas des fonctions explicites.

Exemple.

Soit $\quad F(x, y) = y^3 - 3x^2y + x^3 - 3 = o \quad . \quad . \quad . \quad (1).$

En égalant à o la dérivée de F par rapport à x, on a

$$\frac{dF}{dx} = 3x^2 - 6xy = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Or, de (2), on tire $\quad x = o$ et $y = \frac{x}{2}$.

En substituant la première de ces valeurs dans (1), on obtient

$$y^3 - 3 = o,$$

d'où

$$y = \sqrt[3]{3}.$$

En substituant la seconde valeur, on trouve

$$x^3 + 8 = o,$$

d'où $x = -2$ et, par suite, $y = -1$.

Ainsi, deux couples de valeurs satisfaisant aux équations (1) et (2)

$$\begin{cases} x = o, \\ y = \sqrt[3]{3}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -2, \\ y = -1. \end{cases}$$

D'ailleurs, on trouve que

$$\frac{\dfrac{d^2F}{dx^2}}{\dfrac{dF}{dy}} = \frac{6x - 6y}{3y^2 - 3x^2} = -\frac{2}{y + x}.$$

Substituant le premier couple de valeurs dans cette expression, le résultat est $-\frac{2}{3\sqrt[3]{3}}$. Donc, pour $x = o$, $y = \sqrt[3]{3}$ est minimum.

Substituant le second couple, le résultat est $+\frac{2}{3}$. Donc, pour $x = -2$, $y = -1$ est maximum.

Exercices.

1. $y^2 - x^2y + x - x^3 = o.$

   Pour $x = -1$, $y = 1$, maximum.

2. $y^2 + 2x^2y + 4x - 3 = o.$

   Pour $x = -\frac{1}{2}$, $y = 2$, maximum;

   pour $x = 1$, $y = -1$, ni maximum, ni minimum.

3. $y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = o.$

   Pour $x = \frac{am}{\sqrt{1 - m^2}}$, $y = \frac{a}{\sqrt{1 - m^2}}$, maximum.

4. $x^3 + y^3 - a^2x = o$.

$$\text{Pour } x = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = a\sqrt[3]{\frac{2}{3\sqrt{3}}}, \text{ maximum;}$$

$$\text{pour } x = -\frac{a}{\sqrt{3}}, \; y = -a\sqrt[3]{\frac{2}{3\sqrt{3}}}, \text{ minimum.}$$

5. $x^3 + y^3 - 3axy = o$. (Folium de Descartes.)

$$\text{Pour } x = 2^{\frac{1}{3}}a, \; y = 4^{\frac{1}{3}}a, \text{ maximum;}$$

$$\text{pour } x = o, \quad y = o, \quad \text{minimum.}$$

On ne peut déterminer ce dernier minimum par le procédé indiqué plus haut, car de l'équation proposée on tire $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$, dérivée qui, pour $x = o$ et $y = o$, devient $\frac{o}{o}$ et par suite fournit $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{o}{o}$. Mais les dérivées deuxième et troisième de l'équation du folium sont respectivement :

$$(y^2 - ax)\frac{d^2y}{dx^2} + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a\frac{dy}{dx} + 2x = o,$$

$$(y^2 - ax)\frac{d^3y}{dx^3} + 3\left(2y\frac{dy}{dx} - a\right)\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 2 = o;$$

et, en faisant $x = o$, $y = o$ dans ces équations, la première fournit $\frac{dy}{dx} = o$ et, par suite, la deuxième donne $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{3a}$. Donc, pour $x = o$, $y = o$ est bien un minimum.

6. $x^4 - 2a^2x^2 + a^2y^2 - 8a^4 = o$.

$$\text{Pour } x = o, \quad y = +2a\sqrt{2}, \text{ minimum;}$$

$$\text{pour } x = o, \quad y = -2a\sqrt{2}, \text{ maximum;}$$

$$\text{pour } x = +a, \; y = +3a, \quad \text{maximum;}$$

$$\text{pour } x = +a, \; y = -3a, \quad \text{minimum;}$$

$$\text{pour } x = -a, \; y = +3a, \quad \text{maximum;}$$

$$\text{pour } x = -a, \; y = -3a, \quad \text{minimum.}$$

7. $y^4 - 4a^2xy + x^4 = o.$

Pour $x = a\sqrt[8]{3}$, $y = a\sqrt[8]{27}$, maximum;

pour $x = -a\sqrt[8]{3}$, $y = -a\sqrt[8]{27}$, minimum.

8. $y^4 - 4xy + x^4 + 2 = o.$

Pour $x = +1$, $y = +1$, ni maximum, ni minimum;

pour $x = -1$, $y = -1$, » »

On procédera selon la remarque faite dans l'exercice 3.

9. $\cos(y - x) - 2\sin y - \cos x = o.$

$$\text{Pour } x = \frac{\pi}{6},\ y = \frac{4\pi}{3}, \text{ maximum.}$$

10. $y^2 + mxy + a^2 + bx + nx^2 = o.$

$$\text{Pour } x = \frac{2bn + m\sqrt{b^2n + (m^2 - 4n)a^2n}}{n(m^2 - 4n)},$$

on trouve

$$y = \frac{-bm - 2\sqrt{b^2n + (m^2 - 4n)a^2n}}{m^2 - 4n}, \text{ maximum;}$$

et pour
$$x = \frac{2bn - m\sqrt{b^2n + (m^2 - 4n)a^2n}}{n(m^2 - 4n)},$$

on obtient

$$y = \frac{-bm + 2\sqrt{b^2n + (m^2 - 4n)a^2n}}{m^2 - 4n}, \text{ minimum.}$$

Si $m = o$,

pour $x = -\dfrac{b}{2n}$, on obtient $y = +\dfrac{1}{2n}\sqrt{b^2n - 4a^2n^2}$, maximum,

et $y = -\dfrac{1}{2n}\sqrt{b^2n - 4a^2n^2}$, minimum.

Si $n = o$, $x = \infty$ et $y = -\dfrac{b}{m}$, ni maximum, ni minimum.

Si $m^2 = 4n$, pour $x = -\dfrac{a^2m^2 + b^2}{b^2m}$, $y = \dfrac{a^2m^2 - b^2}{bm}$, minimum.

(Euler.)

SECTION III. — *Fonctions de plusieurs variables indépendantes.*

Soit z une fonction explicite de x et de y.

Les racines réelles des équations

$$\frac{dz}{dx}=o,\ \frac{dz}{dy}=o$$

seront les valeurs de x et de y correspondant aux maxima et aux minima de z si, pour chaque couple de ces valeurs, l'inégalité suivante est satisfaite

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 < \frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1);$$

ce qui exige que $\frac{d^2z}{dx^2}$ et $\frac{d^2z}{dy^2}$ soient de même signe. Du reste, maximum, si ces deux dérivées sont négatives; minimum, si elles sont positives.

Si les valeurs de x et de y, fournies par les équations $\frac{dz}{dx}=o$ et $\frac{dz}{dy}=o$, rendaient nulles les trois dérivées de deuxième ordre, il n'y aurait ni maximum, ni minimum; à moins que ces valeurs n'annullent aussi les dérivées du troisième ordre, sans annuler celles du quatrième qui devraient avoir le même signe, etc.

Soit u une fonction explicite de x, de y et de z.

Les racines réelles des équations

$$\frac{du}{dx}=o,\ \frac{du}{dy}=o,\ \frac{du}{dz}=o$$

seront les valeurs de x, y, z correspondant aux maxima et aux minima de u si, pour chaque groupe de ces valeurs, la condition suivante est satisfaite

$$\left(\frac{d^2u}{dydz}\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{d^2u}{dxdy}\frac{d^2u}{dxdz}\right)^2 < \left[\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2}-\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2\right]\left[\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dz^2}-\left(\frac{d^2u}{dxdz}\right)^2\right] (2);$$

ce qui exige que $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$ et $\frac{d^2u}{dz^2}$ soient de même signe. Du reste, maximum, si ces trois dérivées sont négatives; minimum, si elles sont positives.

Si les valeurs de x, y, z fournies par les équations $\frac{du}{dx} = o$, $\frac{du}{dy} = o$ et $\frac{du}{dz} = o$ annulaient les six dérivées du deuxième ordre, etc. Comme plus haut.

Soit z une fonction implicite de x et y, déterminée par l'équation

$$F(x, y, z) = o.$$

Les équations $\frac{dF}{dx} = o$ et $\frac{dF}{dy} = o$ fourniront, simultanément avec la proposée, les valeurs de x et y qui correspondent aux maxima et aux minima de z et aussi ces maxima et ces minima eux-mêmes.

La substitution de chaque groupe de valeurs trouvées pour x, y et z dans les expressions

$$+\frac{\frac{d^2F}{dx^2}}{\frac{dF}{dz}}, \quad +\frac{\frac{d^2F}{dxdy}}{\frac{dF}{dz}}, \quad +\frac{\frac{d^2F}{dy^2}}{\frac{dF}{dz}}$$

détermine un maximum ou un minimum de z si l'inégalité

$$\left(\frac{\frac{d^2F}{dxdy}}{\frac{dF}{dz}}\right)^2 < \frac{\frac{d^2F}{dx^2}}{\frac{dF}{dz}} \cdot \frac{\frac{d^2F}{dy^2}}{\frac{dF}{dz}} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

est satisfaite, ce qui exige que

$$\frac{\frac{d^2F}{dx^2}}{\frac{dF}{dz}} \text{ et } \frac{\frac{d^2F}{dy^2}}{\frac{dF}{dz}}$$

soient de même signe. D'ailleurs, maximum si ces deux expressions sont positives, minimum si elles sont négatives.

Règles analogues pour les fonctions implicites de plus de deux variables indépendantes.

Les règles précédentes supposent la continuité des fonctions et de leurs dérivées dans le voisinage des valeurs des variables correspondant aux maxima et aux minima. D'ailleurs, dans la pratique, il n'est guère besoin de considérer les fonctions de plus de trois variables indépendantes.

Exemple I.

Soit $$z = x^3 + y^3 - 9xy + 27.$$

On a $$\frac{dz}{dx} = 3x^2 - 9y \text{ et } \frac{dz}{dy} = 3y^2 - 9x.$$

En égalant à o ces dérivées, les équations résultantes sont satisfaites par les couples de valeurs

$$\begin{cases} x = o, \\ y = o, \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = 3, \\ y = 3. \end{cases}$$

On a aussi : $\frac{d^2z}{dx^2} = 6x$, $\frac{d^2z}{dxdy} = -9$, $\frac{d^2z}{dy^2} = 6y$. La substitution du premier couple de valeurs donne

$$\frac{d^2z}{dx^2} = o, \quad \frac{d^2z}{dxdy} = -9, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = o$$

et il est évident que, pour ces résultats, l'inégalité (1) n'est point satisfaite. Donc, pour $x = o$ et $y = o$, $z = 27$ n'est ni un maximum ni un minimum.

La substitution du deuxième couple de valeurs fournit

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 18, \quad \frac{d^2z}{dxdy} = -9, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = 18$$

et il est aisé de voir que, pour ces résultats, l'inégalité (1) est satisfaite. Du reste, $\frac{d^2z}{dx^2}$ et $\frac{d^2z}{dy^2}$ étant positives, $z = o$ est minimum pour $x = 3$ et $y = 3$.

Exemple II.

Soit $$u = xy^2z^3(a - x - y - z).$$

On a $$\frac{du}{dx} = y^2z^3(a - 2x - y - z),$$

$$\frac{du}{dy} = xyz^3(2a - 2x - 3y - 2z),$$

$$\frac{du}{dz} = xy^2z^2(3a - 3x - 3y - 4z).$$

En égalant à o ces trois dérivées et ne tenant pas compte des solutions $x = o$, $y = o$, $z = o$ pour lesquelles $u = o$ n'est évidemment ni un maximum, ni un minimum, on trouve

$$x = \frac{a}{7},\ y = \frac{2a}{7},\ z = \frac{3a}{7}.$$

D'ailleurs, on obtient immédiatement $\frac{d^2u}{dx^2} = -2y^2z^3$.

Posant $xyz^3 = v$ et $2a - 2x - 3y - 2z = w$, on a

$$\frac{du}{dy} = vw;\ \text{d'où}\ \frac{d^2u}{dy^2} = v\frac{dw}{dy} + w\frac{dv}{dy}$$

ou plutôt, puisque w est nul pour les valeurs de x, y, z :

$$\frac{d^2u}{dy^2} = v\frac{dw}{dy}$$

ou $$\frac{d^2u}{dy^2} = -3xyz^3.$$

De la même manière, on trouve facilement que

$$\frac{d^2u}{dz^2} = -4xy^2z^2,\ \frac{d^2u}{dxdy} = -y^2z^3,\ \frac{d^2u}{dydz} = -2xyz^3,\ \frac{d^2u}{dzdx} = -3xy^2z^2.$$

Substituant les valeurs des six dérivées de deuxième

ordre dans l'inégalité (2) et divisant les deux membres par xy^6z^{10}, on trouve

$$x(4z-3y)^2 < y(6x-y)(8z-9x)$$

et il est facile de s'assurer que, pour $x=\frac{a}{7}$, $y=\frac{2a}{7}$ et $z=\frac{3a}{7}$, cette inégalité est satisfaite.

Du reste, puisque les dérivées $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$ et $\frac{d^2u}{dz^2}$ sont négatives, $u=108\left(\frac{a}{7}\right)^7$ est maximum.

Il y a souvent avantage, comme dans cet exemple, à vérifier l'inégalité (2) après y avoir substitué les valeurs générales des dérivées du deuxième ordre; les calculs sont plus simples.

Exemple III.

Soit $F(x,y,z)=z^2+xyz-xy^2-x^3=o.$

En égalant à o les dérivées de F par rapport à x et à y, on a

$$\frac{dF}{dx}=yz-y^2-3x^2=o,$$

$$\frac{dF}{dy}=xz-2xy=o.$$

Les trois équations précédentes sont satisfaites (en ne tenant pas compte des solutions $x=o$, $y=o$, $z=o$) par les groupes de valeurs

$$\begin{cases} x=-6, \\ y=6\sqrt{3}, \\ z=12\sqrt{3}, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-6, \\ y=-6\sqrt{3}, \\ z=-12\sqrt{3}. \end{cases}$$

D'autre part,

$$\frac{\frac{d^2F}{dx^2}}{\frac{dF}{dz}}=-\frac{6x}{2z+xy}, \quad \frac{\frac{d^2F}{dxdy}}{\frac{dF}{dz}}=\frac{z-2y}{2z+xy}, \quad \frac{\frac{d^2F}{dy^2}}{\frac{dF}{dz}}=-\frac{2x}{2z+xy}.$$

La substitution, dans ces expressions, du premier groupe de valeurs, donne

$$\frac{\frac{d^2F}{dx^2}}{\frac{dF}{dz}} = -\sqrt{3}, \quad \frac{\frac{d^2F}{dx\,dy}}{\frac{dF}{dz}} = 0, \quad \frac{\frac{d^2F}{dy^2}}{\frac{dF}{dz}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Pour ces résultats, l'inégalité (3) est visiblement satisfaite, et puisque

$$\frac{\frac{d^2F}{dx^2}}{\frac{dF}{dz}} \text{ et } \frac{\frac{d^2F}{dy^2}}{\frac{dF}{dz}}$$

sont négatives, $z = 12\sqrt{3}$ est minimum pour $x = -6$ et $y = 6\sqrt{3}$.

La substitution du second groupe de valeurs fournit

$$\frac{\frac{d^2F}{dx^2}}{\frac{dF}{dz}} = +\sqrt{3}, \quad \frac{\frac{d^2F}{dx\,dy}}{\frac{dF}{dz}} = 0, \quad \frac{\frac{d^2F}{dy^2}}{\frac{dF}{dz}} = +\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

L'inégalité (3) est donc encore satisfaite et, puisque

$$\frac{\frac{d^2F}{dx^2}}{\frac{dF}{dz}} \text{ et } \frac{\frac{d^2F}{dy^2}}{\frac{dF}{dz}}$$

sont positives, $z = -12\sqrt{3}$ est maximum pour $x = -6$ et $y = -6\sqrt{3}$.

Exercices.

1. $z = x^2 - xy + y^2 - 3y$.

   Pour $x = 1$ et $y = 2$, $z = -3$ est minimum.

2. $z = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x + 8y$.

   Pour $x = 1$ et $y = -1$, $z = -12$ est minimum.

3. $z = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y + x^3 - 3x^2 - 3x$.

Pour $x = 1 + \sqrt{2}$ et $y = 2 \pm \sqrt{3}$, $z = -6 - 4\sqrt{2}$, double minimum;
pour $x = 1 - \sqrt{2}$ et $y = 2$, $z = 3 + 4\sqrt{2}$, maximum;
pour $x = 1 - \sqrt{2}$ et $y = 2 \pm \sqrt{3}$, ni maximum, ni minimum de z;
pour $x = 1 + \sqrt{2}$ et $y = 2$, ni maximum, ni minimum de z.

4. $z = x^4 + y^4 - ax^2y - axy^2 + c^2x^2 + c^2y^2$.

Pour $x = y = o$, $z = o$ est un minimum.

Pour $x = y = \dfrac{3a + \sqrt{9a^2 - 32c^2}}{8}$, $z = -\dfrac{27}{256}a^4 + \dfrac{9}{16}a^2c^2 - \dfrac{c^4}{2} - \dfrac{a}{256}(9a^2 - 32c^2)^{\frac{3}{2}}$ est minimum.

Pour $x = y = \dfrac{3a - \sqrt{9a^2 - 32c^2}}{8}$, $z = -\dfrac{27}{256}a^4 + \dfrac{9}{16}a^2c^2 - \dfrac{c^4}{2} + \dfrac{a}{256}(9a^2 - 32c^2)^{\frac{3}{2}}$ n'est ni maximum, ni minimum.

Pour trouver les autres valeurs de x et y qui pourraient correspondre à des maxima ou à des minima de z, il faudrait résoudre une équation littérale du sixième degré.

(Euler.)

5. $z^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2 - ex - fy$. (Équation générale des surfaces courbes du second ordre.)

Pour $x = \dfrac{ce - bf}{2(ac - b^2)}$ et $y = \dfrac{af - be}{2(ac - b^2)}$, z sera minimum si a et c sont positifs et $b^2 < ac$; maximum, si a et c sont négatifs et $b^2 < ac$; ni maximun, ni minimum, si a et c sont de signes différents ou si b^2 est $> ac$. (Lagrange.)

6. $z = x^2y(x^4 + 2y^3 - a)^2$.

Pour $x = \sqrt[4]{\dfrac{3a}{17}}$ et $y = \sqrt[3]{\dfrac{a}{17}}$, z est maximum.

7. $z = \frac{x^3y^3}{(x-a)(y-b)}$.

Généralement quand log z est maximum ou minimum, z l'est aussi.

Posant $\log z = z'$, on a

$$z' = 3\log x + 3\log y - \log(x-a) - \log(y-b).$$

D'où $\frac{dz'}{dx} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x-a}$ et $\frac{dz'}{dy} = \frac{3}{y} - \frac{1}{y-b}$.

Égalant à o ces dérivées, il vient

$$2x - 3a = o,$$
$$2y - 3b = o.$$

D'où $$x = \frac{3a}{2},\ y = \frac{3b}{2}.$$

D'autre part, $$\frac{d^2z'}{dx^2} = -\frac{3}{x^2} + \frac{1}{(x-a)^2},$$

$$\frac{d^2z'}{dxdy} = o,$$

$$\frac{d^2z'}{dy^2} = -\frac{3}{y^2} + \frac{1}{(y-b)^2}.$$

En substituant dans ces dérivées de second ordre les valeurs de x et y, on trouve

$$\frac{d^2z'}{dx^2} = \frac{8}{3a^2},\quad \frac{d^2z'}{dxdy} = o,\quad \frac{d^2z'}{dy^2} = \frac{8}{3b^2}.$$

D'après ces résultats, il est facile de voir que pour $x = \frac{3a}{2}$ et $y = \frac{3b}{2}$, $z' = \log\left(\frac{27}{4}ab\right)^2$, et, par suite, $z = \left(\frac{27}{4}ab\right)^2$ est minimum.

Le procédé suivi dans cet exercice est souvent employé quand la fonction est un produit ou renferme des radicaux.

8. $z = xy\sqrt{a^2b^2 - a^2x^2 - b^2y^2}$.

Pour $x = \pm\frac{b}{\sqrt{3}}$ et $y = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}$, $z = \frac{a^2b^2}{3\sqrt{3}}$; double maximum.

9. $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$.

Pour $x = y = 60°$, $z = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ est un maximum.

10. $u = xyz(a^2 - x^2 - y^2 - z^2)$.

Pour $x = y = z = \frac{a}{\sqrt{5}}$, $u = \frac{2a^5}{25\sqrt{5}}$, un maximum;

pour $x = y = z = -\frac{a}{\sqrt{5}}$, $u = -\frac{2a^5}{25\sqrt{5}}$, ni maximum, ni minimum.

11. $u = ax^2 - bxy + xz + yz$.

Pour $x = y = z = o$, $u = o$ n'est ni maximum, ni minimum.

12. $u = \frac{2^4 . abxyz}{(a+x)(x+y)(y+z)(z+c)}$.

En procédant comme dans l'exercice 7 et posant dans le cours du calcul $\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{n}$, on trouve que, pour $x = an$, $y = an^2$, $z = an^3$,

$$u = ab\left(\frac{2}{a^{\frac{1}{4}} + c^{\frac{1}{4}}}\right)^4.$$

13. $a(x^3 + y^3 + z^3) = x^2yz + y^2xz + z^2xy$.

$$\text{Pour } x = y = a\,.\,1,6\ldots\ldots$$
$$z = a\,.\,0,85\ldots\ldots, \text{ un minimum.}$$

14. Trouver dans l'intérieur d'un triangle un point tel que la somme des carrés de ses distances aux trois sommets soit minimum.

Soient A, B, C les sommets du triangle proposé; a, b, c les côtés opposés; O le point cherché.

En prenant le sommet A pour origine, la direction de c pour axe des abcisses; représentant par x, y les coordon-

nées rectangulaires du point O et par u la fonction qu'il faut rendre un minimum, on trouve que

$$u = x^2 + y^2 + (c - x)^2 + y^2 + (b\cos A - x)^2 + (b\sin A - y)^2$$

et que, pour $x = \frac{c + b\cos A}{3}$ et $y = \frac{b\sin A}{3}$, u est minimum.

D'ailleurs, pour ces valeurs de x et y, les distances du point cherché aux sommets du triangle sont

$$AO = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{3}, \quad BO = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{3}, \quad CO = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{3}.$$

Le point O est le centre de gravité du triangle.

15. De tous les triangles que l'on peut inscrire dans un triangle donné, quel est celui dont le périmètre est le plus petit?

Soient A, B, C les sommets du triangle proposé; a, b, c les côtés opposés; D situé sur c, E situé sur a, F situé sur b, les sommets du triangle cherché. Soient, en outre, $BD = x$, $CE = y$, $AF = z$ et u le périmètre du triangle DEF. On a

$$\begin{aligned} u = & \left[x^2 + (a - y)^2 - 2x(a - y)\cos B\right]^{\frac{1}{2}} \\ & + \left[y^2 + (b - z)^2 - 2y(b - z)\cos C\right]^{\frac{1}{2}} \\ & + \left[z^2 + (c - x)^2 - 2z(c - x)\cos A\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En égalant à o les dérivées de u par rapport à x, à y et à z, on trouve

$$\frac{x - (a - y)\cos B}{\left[x^2 + (a - y)^2 - 2x(a - y)\cos B\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{(c - x) - z\cos A}{\left[z^2 + (c - x)^2 - 2z(e - x)\cos A\right]^{\frac{1}{2}}}$$

et deux autres équations que l'on peut écrire immédiatement. Or si, des points E et F, on mène les perpendiculaires EP et FQ sur AB, il est facile de voir que l'équation précédente n'est autre que

$$\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} \text{ ou } \cos BDE = \cos ADF.$$

Donc les angles BDE et ADF sont égaux. On prouverait de même que les angles BED et CEF, CFE et AFD sont respectivement égaux.

Donc on obtient le triangle cherché en joignant entre eux les pieds des perpendiculaires menées des sommets du triangle donné sur les côtés opposés.

Au lieu de résoudre les équations de condition du maximum ou du minimum de u :

$$\frac{du}{dx}=o, \frac{du}{dy}=o, \frac{du}{dz}=o,$$

on cherche souvent, quand elles sont compliquées, à les interpréter, comme dans cet exercice, de manière à en tirer d'autres conditions que celles des valeurs de x, y, z, etc.

16. On donne deux droites qui se coupent et deux points situés dans l'angle qu'elles forment. Trouver sur les droites deux points tels que la somme de leurs distances entre eux et aux points donnés soit minimum.

Soient A le point de rencontre des deux droites données AX et AY; D et E les deux points donnés; G pris sur AX, F pris sur AY les deux points cherchés. Après avoir mené de E sur AX la perpendiculaire EP et, de D sur AY, la perpendiculaire DQ, soient tirées les droites GE, GF et FD.

Posons

$$\mathrm{AP}=a, \mathrm{AQ}=b, \mathrm{EP}=p, \mathrm{DQ}=q, \mathrm{AG}=x, \mathrm{AF}=y.$$

En représentant par u la somme des droites GE, GF et FD, on trouve que

$$u=\left[p^2+(a-x)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[x^2+y^2-2xy\cos \mathrm{A}\right]^{\frac{1}{2}}+\left[q^2+(b-y)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

et, en égalant à o les dérivées de u par rapport à x et à y,

$$\frac{a-x}{\left[p^2+(a-x)^2\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{x-y\cos \mathrm{A}}{\left[x^2+y^2-2xy\cos \mathrm{A}\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{b-y}{\left[q^2+(b-y)^2\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{y-x\cos \mathrm{A}}{\left[x^2+y^2-2xy\cos \mathrm{A}\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

En interprétant ces équations, comme dans l'exercice précédent, on trouve que, dans le cas du minimum, les angles EGP et FGA sont égaux, ainsi que les angles AFG et QFD. De là, une solution géométrique facile.

17. Étant donnés trois côtés d'un quadrilatère, déterminer les angles qu'ils comprennent de manière que la surface du quadrilatère soit maximum.

Soient a, b, c les côtés consécutifs donnés; $\pi - \theta$ l'angle des côtés a et b; $\pi - \theta'$ celui des côtés b et c.

En représentant par u la surface du quadrilatère, on obtient

$$u = ab \sin \theta + bc \sin \theta' + ac \sin (\theta + \theta').$$

En égalant à o les dérivées de u par rapport à θ et à θ',

$$b \cos \theta + c \cos (\theta + \theta') = o \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

$$b \cos \theta' + a \cos (\theta + \theta') = o \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

L'élimination de θ' entre ces deux équations fournit, pour déterminer θ, l'équation du troisième degré

$$\cos^3 \theta + \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2ab}\right) \cos^2 \theta - \frac{c^2}{2ab} = o.$$

De même on déterminerait θ'.

Mais, en supposant le quadrilatère inscrit dans un demi-cercle dont le côté non donné du quadrilatère est le diamètre, on trouve que les conditions exprimées par les équations (1) et (2) sont satisfaites, le côté non donné du quadrilatère étant d'ailleurs

$$(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos \theta)^{\frac{1}{2}}.$$

18. Trouver dans l'intérieur d'un triangle un point tel que la somme de ses distances aux trois sommets soit minimum.

Soient A, B, C les sommets du triangle; a, b, c les côtés opposés; O le point cherché.

Si, de O, on mène la perpendiculaire OP sur AB et que l'on pose

$$AP = x,\ OP = y,$$

on trouve qu'en représentant par u la somme des droites OA, OB et OC, on a

$$u = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + \left[(c - x)^2 + y^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[(x - b\cos A)^2 + (y - b\sin A)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

et, en égalant à o les dérivées de u par rapport à x et à y,

$$\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{c - x}{\left[(c - x)^2 + y^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{b\cos A - x}{\left[(x - b\cos A)^2 + (y - b\sin A)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{y}{\left[(c - x)^2 + y^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{b\sin A - y}{\left[(x - b\cos A)^2 + (y - b\sin A)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Or, si l'on désigne par θ et θ' les angles AOP et BOP, il est facile de voir que les équations précédentes fournissent

$$\sin\theta - \sin\theta' = \frac{b\cos A - x}{\left[(x - b\cos A)^2 + (y - b\sin A)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\cos\theta + \cos\theta' = \frac{b\sin A - y}{\left[(x - b\cos A)^2 + (y - b\sin A)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Élevant au carré et ajoutant, on trouve

$$\cos(\theta + \theta') = -\frac{1}{2}.$$

D'où $$\theta + \theta' = AOB = 120°.$$

On prouverait de même que AOC et BOC valent chacun 120°.

En représentant par t, v et w les droites OA, OB et OC, on trouve

$$t^2 + vt + v^2 = c^2,$$
$$v^2 + vw + w^2 = a^2,$$
$$w^2 + tw + t^2 = b^2,$$

équations qui donnent, en représentant $t+v+w$ par s,

$$t=\frac{s}{3}+\frac{b^2+c^2-2a^2}{3s},$$

$$v=\frac{s}{3}+\frac{a^2+c^2-2b^2}{3s},$$

$$w=\frac{s}{3}+\frac{a^2+b^2-2c^2}{3s}.$$

Ce problème est célèbre dans l'histoire des mathématiques et M. J. Bertrand en a donné une solution très-pratique dans le *Journal de Liouville*, tome VIII.

SECTION IV. — *Fonctions dont les variables sont liées par des équations.*

Soit
$$u=f(x,y,z,v,w....)$$
une fonction de $m+n$ variables liées par les n équations

$$L=o,\ M=o,\ N=o..... \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Pour déterminer les valeurs des variables qui peuvent correspondre aux maxima et aux minima de u, on égale à o la différentielle totale de u et l'on différentie les équations (1) par rapport à toutes les variables qu'elles contiennent. Des $n+1$ équations ainsi obtenues, on élimine, souvent avec avantage par la méthode des multiplicateurs, les différentielles des n variables dépendantes et, dans l'équation finale, on égale à o chacun des coefficients des différentielles qui restent. Ce procédé fournit m équations qui, jointes aux n équations (1), fournissent les valeurs cherchées.

Pour chaque système de ces valeurs, on reconnaît qu'il y a maximum ou minimum au moyen des dérivées partielles du second ordre de u et des inégalités connues. La nature de la question exempte parfois de ce calcul souvent laborieux.

Exemple I.

Soit à chercher le maximum et le minimum de la fonction

$$u = a \sin^2 x + b \sin^2 y,$$

x et y étant liés par l'équation

$$y - x = \frac{\pi}{4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Égalant à o la différentielle totale de u et différentiant (1), on a

$$a \sin 2x dx + b \sin 2y\, dy = o,$$
$$dy - dx = o.$$

Éliminant dy et égalant à o le coefficient de dx dans l'équation résultante, on trouve

$$a \sin 2x + b \sin 2y = o \quad \ldots\ldots \quad (2),$$

et le système des équations (1) et (2) doit fournir les valeurs des variables correspondant au maximum et au minimum.

Or, de (1), on tire

$$y = x + \frac{\pi}{4}$$

et, par suite,

$$\sin 2y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x.$$

Substituant cette valeur de $\sin 2y$ dans (2), on obtient

$$\text{tang}\, 2x = -\frac{b}{a}.$$

D'où

$$\sin^2 x = \frac{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \pm a}{2(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \sin^2 y = \frac{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \pm b}{2(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}$$

et

$$u = \frac{1}{2}\left[a + b \pm (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Le signe supérieur donne pour u un maximum et le signe inférieur un minimum.

Exemple II.

Par un point donné mener un plan tel qu'il forme avec les plans coordonnés un tétraèdre minimum.

Soient O l'origine des coordonnées rectangulaires; A, B et C les points où le plan cherché rencontre les axes OX, OY et OZ; a, b, c, les coordonnées du point donné.

Posant $OA = x$, $OB = y$ et $OC = z$, on trouve que la fonction dont il faut trouver le minimum est

$$u = \frac{xyz}{6},$$

les variables étant liées par l'équation

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1. \quad \ldots \ldots \quad (1).$$

La fonction proposée donne

$$\log u = \log x + \log y + \log z - \log 6.$$

Égalant à o la différentielle totale de cette expression et différentiant (1), on a

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = o,$$

$$\frac{adx}{x^2} + \frac{bdy}{y^2} + \frac{cdz}{z^2} = o.$$

Entre ces deux équations, il faut éliminer dz et égaler à o, dans l'équation finale, les coefficients de dy et de dx. On y parvient élégamment par la méthode du multiplicateur indéterminé.

Multipliant donc la première de ces équations par le facteur indéterminé λ, soustrayant de l'équation résultante la seconde équation, membre à membre, puis égalant à o les coefficients de dx, dy et dz, on trouve facilement

$$\lambda = \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}.$$

D'où $3\lambda = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$, en vertu de l'équation (1).

Donc, $$\lambda = \frac{1}{3}$$

et, par suite,

$$x = 3a,\ y = 3b,\ z = 3c \text{ et } u = \frac{9abc}{2}.$$

On reconnaît aisément que cette valeur de u ne peut être qu'un minimum.

Exemple III.

Décomposer le nombre n en trois parties telles que la somme de leurs carrés soit maximum et que, multipliées respectivement par les nombres a, b et c, la somme algébrique des produits soit nulle.

Soient x, y, z les parties.

On aura à chercher le maximum de

$$u = x^2 + y^2 + z^2,$$

les variables étant liées par les équations

$$\begin{cases} x + y + z = n, \\ ax + by + cz = o. \end{cases} \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Égalant à o la dérivée totale de u et différentiant les équations (1), on a

$$xdx + ydy + zdz = o \quad \ldots\ldots \quad (2),$$

$$dx + dy + dz = o \quad \ldots\ldots \quad (3),$$

$$adx + bdy + cdz = o \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Entre ces équations il faut éliminer dz et dy, puis, dans l'équation finale, égaler à o le coefficient de dx. On y parvient élégamment comme suit :

Multipliant (3) par λ et (4) par $-\mu$ (λ et μ étant des multiplicateurs indéterminés), puis additionnant, on trouve

$$a\mu + x = \lambda,\ b\mu + y = \lambda,\ c\mu + z = \lambda \quad .\ . \quad (5).$$

De ces équations, jointes aux équations (1), il faut tirer les valeurs de x, y, z, λ et μ.

Additionnant les équations (3), on a

$$(a + b + c)\mu + n = 3\lambda.$$

Les additionnant de nouveau après les avoir multipliées respectivement par a, b et c, on trouve

$$(a^2 + b^2 + c^2)\mu = (a + b + c)\lambda.$$

Posant $a + b + c = s_1$ et $a^2 + b^2 + c^2 = s_2$, les deux dernières équations s'écrivent

$$s_1\mu + n = 3\lambda,$$
$$s_2\mu = s_1\lambda.$$

D'où
$$\mu = \frac{ns_1}{3s_2 - s_1^2} \text{ et } \lambda = \frac{ns_2}{3s_2 - s_1^2}.$$

Substituant ces valeurs de μ et de λ dans les équations (3), on trouve

$$x = \frac{n}{3s_2 - s_1^2}(s_2 - as_1),$$
$$y = \frac{n}{3s_2 - s_1^2}(s_2 - bs_1),$$
$$z = \frac{n}{3s_2 - s_1^2}(s_2 - cs_1).$$

Le maximum demandé est donc

$$u = \frac{n^2}{(3s_2 - s_1^2)^2}\left[(s_2 - as_1)^2 + (s_2 - bs_1)^2 + (s_2 - cs_1)^2\right].$$

Exemple IV.

Partager un nombre donné a en n parties telles que leur produit soit un maximum.

Soient x, y, z, v, w .... les n parties, on aura à chercher le maximum de

$$u = xyzvw\ldots\ldots,$$

les variables étant liées par l'équation

$$x + y + z + v + w + \ldots. = a \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Égalant à o la différentielle logarithmique de u et différentiant (1), on a

$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}+\frac{dv}{v}+\frac{dw}{w}+\ldots=o,$$

$$dx+dy+dz+dv+dw+\ldots=o.$$

Multipliant la première équation par le multiplicateur indéterminé λ, additionnant l'équation résultante avec la seconde équation et égalant à o les coefficients de dx, dy, dz, dv, dw ..., on trouve

$$\lambda=x=y=z=v=w=\ldots\ldots$$

D'où $$n\lambda=a \text{ et } \lambda=\frac{a}{n}\cdot$$

Donc $x=y=z=v=w\ldots.=\frac{a}{n}$ et $u=\left(\frac{a}{n}\right)^n$.

Ce problème permet d'en résoudre nombre d'autres très-facilement.

Exercices.

1. $u=\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}$,

les variables étant liées par l'équation $x+y=c$.

Pour $x=c\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$ et $y=c\frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$, on trouve

$$u=\frac{1}{c}\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right), \text{ un minimum.}$$

2. $u=5x+3y$,

x et y étant liés par l'équation $4\sin x-3\cos y=o$.

On trouve

$$u=5\text{ arc sin}\left(\frac{3}{4}\right)^2+3\text{ arc cos}\frac{3}{4}=5{,}155.., \text{ un maximum.}$$

3. $u=(mx+n)(ny+m)$,

x et y étant liés par l'équation $a^{mx}+b^{ny}=c$.

De ces équations, jointes aux équations (1), il faut tirer les valeurs de x, y, z, λ et μ.

Additionnant les équations (3), on a

$$(a + b + c)\mu + n = 3\lambda.$$

Les additionnant de nouveau après les avoir multipliées respectivement par a, b et c, on trouve

$$(a^2 + b^2 + c^2)\mu = (a + b + c)\lambda.$$

Posant $a + b + c = s_1$ et $a^2 + b^2 + c^2 = s_2$, les deux dernières équations s'écrivent

$$s_1\mu + n = 3\lambda,$$
$$s_2\mu = s_1\lambda.$$

D'où
$$\mu = \frac{ns_1}{3s_2 - s_1^2} \text{ et } \lambda = \frac{ns_2}{3s_2 - s_1^2}.$$

Substituant ces valeurs de μ et de λ dans les équations (3), on trouve

$$x = \frac{n}{3s_2 - s_1^2}(s_2 - as_1),$$

$$y = \frac{n}{3s_2 - s_1^2}(s_2 - bs_1),$$

$$z = \frac{n}{3s_2 - s_1^2}(s_2 - cs_1).$$

Le maximum demandé est donc

$$u = \frac{n^2}{(3s_2 - s_1^2)^2}\left[(s_2 - as_1)^2 + (s_2 - bs_1)^2 + (s_2 - cs_1)^2\right].$$

Exemple IV.

Partager un nombre donné a en n parties telles que leur produit soit un maximum.

Soient x, y, z, v, w .... les n parties, on aura à chercher le maximum de

$$u = xyzvw\ldots\ldots,$$

les variables étant liées par l'équation

$$x + y + z + v + w + \ldots\ldots = a \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Égalant à o la différentielle logarithmique de u et différentiant (1), on a

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \ldots = o,$$

$$dx + dy + dz + dv + dw + \ldots = o.$$

Multipliant la première équation par le multiplicateur indéterminé λ, additionnant l'équation résultante avec la seconde équation et égalant à o les coefficients de dx, dy, dz, dv, dw ..., on trouve

$$\lambda = x = y = z = v = w = \ldots\ldots$$

D'où $$n\lambda = a \text{ et } \lambda = \frac{a}{n}\cdot$$

Donc $x = y = z = v = w \ldots. = \frac{a}{n}$ et $u = \left(\frac{a}{n}\right)^n$.

Ce problème permet d'en résoudre nombre d'autres très-facilement.

Exercices.

1. $u = \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2}$,

les variables étant liées par l'équation $x + y = c$.

Pour $x = c\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}$ et $y = c\frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}$, on trouve

$$u = \frac{1}{c}\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right), \text{ un minimum.}$$

2. $u = 5x + 3y$,

x et y étant liés par l'équation $4\sin x - 3\cos y = o$.

On trouve

$$u = 5 \text{ arc sin } \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3 \text{ arc cos } \frac{3}{4} = 5{,}155.., \text{ un maximum.}$$

3. $u = (mx + n)(ny + m)$,

x et y étant liés par l'équation $a^{mx} + b^{ny} = c$.

des arêtes est la même, quel est celui dont le volume est le plus grand?

Soient x, y, z trois arêtes contiguës, a leur somme.

On aura à chercher le maximum de

$$u = xyz,$$

x, y, z étant liés par l'équation

$$x + y + z = a.$$

C'est le problème présenté comme exemple IV.

Pour $x = y = z = \frac{a}{3}$, $u = \frac{a^3}{27}$, un maximum.

12. De tous les cylindres droits, à base elliptique, que l'on peut inscrire dans une sphère donnée, quel est celui dont le volume est maximum?

Soient x et y les demi-axes de l'ellipse de base; z la hauteur du cylindre; a le rayon de la sphère.

Il faudra chercher le maximum de

$$u = \pi xyz,$$

les variables étant liées par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

En faisant usage des logarithmes et du multiplicateur indéterminé, on trouve que pour

$$x = y = z = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

$u = \frac{\pi a^3}{3\sqrt{3}}$ est le maximum cherché.

L'ellipse de base doit donc être un cercle.

13. Plus courte distance d'un point à un plan.

Soient a, b, c les coordonnées du point;

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ l'équation du plan} \quad . \quad . \quad (1).$$

On aura à chercher le minimum de

$$u = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

x, y et z étant liés par l'équation (1).

Égalant à o la différentielle totale de u et différentiant (1), on a

$$(x-a)\,dx + (y-b)\,dy + (z-c)\,dz = o,$$
$$\mathrm{A}dx + \mathrm{B}dy + \mathrm{C}dz = o.$$

En faisant usage du multiplicateur indéterminé, on trouve

$$\frac{x-a}{\mathrm{A}} = \frac{y-b}{\mathrm{B}} = \frac{z-c}{\mathrm{C}}.$$

D'où, par les propriétés connues des rapports égaux,

$$\frac{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}{\mathrm{A}(x-a)+\mathrm{B}(y-b)+\mathrm{C}(z-c)} = \pm\frac{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}}$$

ou
$$\frac{u^2}{-(\mathrm{A}a+\mathrm{B}b+\mathrm{C}c+\mathrm{D})} = \pm\frac{u}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}}.$$

D'où
$$u = \frac{\mathrm{A}a+\mathrm{B}b+\mathrm{C}c+\mathrm{D}}{\mp\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}}.$$

14. Maximum et minimum de la distance d'un point donné à une sphère donnée.

Soient a, b, c les coordonnées du point donné; x, y, z les coordonnées courantes des points de la sphère; α, β, γ les coordonnées de son centre; R son rayon.

On aura à chercher le maximum et le minimum de

$$u = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2},$$

l'équation de la sphère

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 = \mathrm{R}^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

liant les variables.

La règle fournit les équations différentielles

$$(x-a)\,dx + (y-b)\,dy + (z-c)\,dz = o \quad . \quad . \quad (2),$$
$$(x-\alpha)\,dx + (y-\beta)\,dy + (z-\gamma)\,dz = o \quad . \quad . \quad (3).$$

Soustrayant ces deux équations, on trouve que l'une d'elles, (2), peut être remplacée par

$$(a-\alpha)\,dx + (b-\beta)\,dy + (c-\gamma)\,dz = o \quad . \quad . \quad (4).$$

Multipliant (4) par le facteur indéterminé λ, retranchant (5) et égalant à o les coefficients des différentielles, on trouve

$$\frac{x-\alpha}{a-\alpha}=\frac{y-\beta}{b-\beta}=\frac{z-\gamma}{c-\gamma}=\pm\frac{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}{\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}}.$$

D'où, en représentant par D la distance du point donné au centre de la sphère, laquelle est

$$\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2},$$

$$x-\alpha=\pm\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{D}}(a-\alpha),$$

$$y-\beta=\pm\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{D}}(b-\beta),$$

$$z-\gamma=\pm\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{D}}(c-\gamma).$$

Et, par substitution, $u=\mathrm{D}\pm\mathrm{R}$.

Le signe supérieur correspond au maximum, le signe inférieur au minimum.

15. La surface $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$ (1) est coupée par le plan $lx+my+nz=o$. Trouver le maximum et le minimum de la distance du centre de la surface à un point du périmètre de la section.

En représentant par r la distance dont il s'agit, il faudra déterminer le maximum et le minimum de

$$r^2=x^2+y^2+z^2,$$

les variables x, y, z étant liées par les deux équations de la surface et du plan. En opérant comme dans l'exemple III, on trouvera pour déterminer le maximum et le minimum de r l'équation

$$\frac{l^2}{r^2-a^2}+\frac{m^2}{r^2-b^2}+\frac{n^2}{r^2-c^2}=o.$$

(1) est la *surface d'élasticité* et l'équation précédente sert

à trouver les vitesses de l'onde propagée dans un milieu cristallisé. (Fresnel et Herschell.)

16. Un paraboloïde elliptique est coupé par un plan perpendiculaire à l'axe. Trouver le plus grand parallélipipède rectangle que l'on puisse inscrire dans la portion de paraboloïde déterminée par le plan sécant.

Soient a la distance du plan au sommet du paraboloïde; x, y, z les coordonnées de l'un des points communs au paraboloïde et au parallélipipède.

Il faudra chercher le maximum de

$$u = 4(a - x)\,yz \text{ (volume du parallélipipède)},$$

x, y, z étant liés par l'équation du paraboloïde

$$\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} = x.$$

On trouvera que, pour

$$x = \frac{a}{2},\ y = \left(\frac{ap}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } z = \left(\frac{aq}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

le maximum est

$$u = a^2\sqrt{pq}.$$

Si le paraboloïde était de révolution, on aurait $u = a^2 p$.

17. Trouver l'aire de la section faite dans un hyperboloïde à une nappe par un plan qui passe au centre.

La section est une ellipse dont les axes sont les valeurs maximum et minimum du rayon vecteur

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

les variables x, y et z étant liées

1° par $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, équation de l'hyperboloïde;

2° par $lx + my + nz = 0$, équation du plan sécant.

En opérant comme dans l'exemple III, on trouve pour

De ces équations, jointes aux équations (1), il faut tirer les valeurs de x, y, z, λ et μ.

Additionnant les équations (3), on a

$$(a + b + c)\mu + n = 3\lambda.$$

Les additionnant de nouveau après les avoir multipliées respectivement par a, b et c, on trouve

$$(a^2 + b^2 + c^2)\mu = (a + b + c)\lambda.$$

Posant $a + b + c = s_1$ et $a^2 + b^2 + c^2 = s_2$, les deux dernières équations s'écrivent

$$s_1\mu + n = 3\lambda,$$
$$s_2\mu = s_1\lambda.$$

D'où
$$\mu = \frac{ns_1}{3s_2 - s_1^2} \text{ et } \lambda = \frac{ns_2}{3s_2 - s_1^2}.$$

Substituant ces valeurs de μ et de λ dans les équations (3), on trouve

$$x = \frac{n}{3s_2 - s_1^2}(s_2 - as_1),$$

$$y = \frac{n}{3s_2 - s_1^2}(s_2 - bs_1),$$

$$z = \frac{n}{3s_2 - s_1^2}(s_2 - cs_1).$$

Le maximum demandé est donc

$$u = \frac{n^2}{(3s_2 - s_1^2)^2}\left[(s_2 - as_1)^2 + (s_2 - bs_1)^2 + (s_2 - cs_1)^2\right].$$

Exemple IV.

Partager un nombre donné a en n parties telles que leur produit soit un maximum.

Soient x, y, z, v, w .... les n parties, on aura à chercher le maximum de

$$u = xyzvw\ldots\ldots,$$

les variables étant liées par l'équation

$$x + y + z + v + w + \ldots\ldots = a \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Égalant à o la différentielle logarithmique de u et différentiant (1), on a

$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}+\frac{dv}{v}+\frac{dw}{w}+\ldots=o,$$

$$dx+dy+dz+dv+dw+\ldots=o.$$

Multipliant la première équation par le multiplicateur indéterminé λ, additionnant l'équation résultante avec la seconde équation et égalant à o les coefficients de dx, dy, dz, dv, dw ..., on trouve

$$\lambda=x=y=z=v=w=\ldots\ldots$$

D'où $$n\lambda=a \text{ et } \lambda=\frac{a}{n}\cdot$$

Donc $x=y=z=v=w\ldots.=\frac{a}{n}$ et $u=\left(\frac{a}{n}\right)^n\cdot$

Ce problème permet d'en résoudre nombre d'autres très-facilement.

Exercices.

1. $u=\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}$,

les variables étant liées par l'équation $x+y=c$.

Pour $x=c\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$ et $y=c\frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$, on trouve

$$u=\frac{1}{c}\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right), \text{ un minimum.}$$

2. $u=5x+3y$,

x et y étant liés par l'équation $4\sin x-3\cos y=o$.

On trouve

$$u=5 \text{ arc sin}\left(\frac{3}{4}\right)^2+3 \text{ arc cos}\frac{3}{4}=5{,}155.., \text{ un maximum.}$$

3. $u=(mx+n)(ny+m)$,

x et y étant liés par l'équation $a^{mx}+b^{ny}=c$.

En faisant usage des logarithmes et de la méthode du multiplicateur indéterminé, on trouve que

$$\text{pour } mx+n=\frac{\log(a^nb^mc)}{2\log a} \text{ et } ny+m=\frac{\log(a^nb^mc)}{2\log b},$$

$$u=\frac{[\log(a^nb^mc)]^2}{4\log a\log b}, \text{ un maximum.}$$

4. $u=(x+a)(y+b)(z+c)$,

x, y et z étant liés par l'équation

$$a^xb^yc^z=k.$$

En opérant comme dans l'exercice précédent, on trouve aisément les valeurs de $x+a$, $y+b$, $z+c$ et de

$$u=\frac{(\log ka^ab^bc^c)^3}{27\log a\log b\log c}, \text{ un maximum.}$$

5. $u=xy^2z^3$,

l'équation $$x+my^2+nz^3=a$$

liant les variables.

Par la méthode du multiplicateur indéterminé, on trouve facilement

$$u=\frac{a^3}{27mn}, \text{ un maximum.}$$

6. $u=\cos x\cos y\cos z$,

l'équation de liaison des variables étant

$$x+y+z=\pi.$$

En égalant à o la différentielle logarithmique de la fonction et employant le multiplicateur indéterminé,

$$\tang x=\tang y=\tang z.$$

D'où $$x=y=z=\frac{\pi}{3} \text{ et } u=\frac{1}{8}, \text{ un maximum.}$$

7. $u=(a^x-1)(b^y-1)(c^z-1)$,

x, y, z étant liés par l'équation $a^xb^yc^z=k$.

Faisant usage des différentielles logarithmiques et du multiplicateur indéterminé,

$$u = \left(k^{\frac{1}{3}} - 1\right)^3, \text{ un maximum.}$$

8. $$u = \left(\frac{a^{x+1} - 1}{a - 1}\right)\left(\frac{b^{y+1} - 1}{b - 1}\right)\left(\frac{c^{z+1} - 1}{c - 1}\right),$$

l'équation de liaison étant $x^a y^b z^c = \mathrm{A}$.

Opérant comme dans les exemples précédents, on obtient pour maximum de la fonction proposée

$$u = \frac{\left(\sqrt[3]{\mathrm{A}abc} - 1\right)^3}{(a - 1)(b - 1)(c - 1)}.$$

9. $u = x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta$,

les variables x, y, z et t étant liées par l'équation

$$x + 2y + 3z + 4t = a.$$

On trouve pour maximum de la fonction

$$u = \left(\frac{a}{n}\right)^n \left(\frac{\alpha}{1}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{2}\right)^\beta \left(\frac{\gamma}{3}\right)^\gamma \left(\frac{\delta}{4}\right)^\delta.$$

10. L'un des angles obliques d'un triangle sphérique rectangle est donné : déterminer les côtés qui comprennent cet angle, de sorte que leur différence soit la plus grande possible.

Soient a l'angle donné, φ et θ les côtés qui le comprennent, φ représentant l'hypothénuse.

Il faudra chercher le maximum de

$$u = \varphi - \theta,$$

φ et θ étant liés par l'équation

$$\operatorname{tang}\theta = \cos a \operatorname{tang}\varphi.$$

On trouvera que pour

$$\operatorname{tang}\varphi = (\sec a)^{\frac{1}{2}} \text{ et } \operatorname{tang}\theta = (\cos a)^{\frac{1}{2}},$$

u est maximum.

11. De tous les parallélipipèdes rectangles dont la somme

des arêtes est la même, quel est celui dont le volume est le plus grand?

Soient x, y, z trois arêtes contiguës, a leur somme.

On aura à chercher le maximum de

$$u = xyz,$$

x, y, z étant liés par l'équation

$$x + y + z = a.$$

C'est le problème présenté comme exemple IV.

Pour $x = y = z = \frac{a}{3}$, $u = \frac{a^3}{27}$, un maximum.

12. De tous les cylindres droits, à base elliptique, que l'on peut inscrire dans une sphère donnée, quel est celui dont le volume est maximum?

Soient x et y les demi-axes de l'ellipse de base; z la hauteur du cylindre; a le rayon de la sphère.

Il faudra chercher le maximum de

$$u = \pi xyz,$$

les variables étant liées par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

En faisant usage des logarithmes et du multiplicateur indéterminé, on trouve que pour

$$x = y = z = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

$u = \frac{\pi a^3}{3\sqrt{3}}$ est le maximum cherché.

L'ellipse de base doit donc être un cercle.

13. Plus courte distance d'un point à un plan.

Soient a, b, c les coordonnées du point;

$Ax + By + Cz + D = o$ l'équation du plan . . (1).

On aura à chercher le minimum de

$$u = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2},$$

x, y et z étant liés par l'équation (1).

Égalant à o la différentielle totale de u et différentiant (1), on a

$$(x-a)\,dx + (y-b)\,dy + (z-c)\,dz = o,$$
$$A dx + B dy + C dz = o.$$

En faisant usage du multiplicateur indéterminé, on trouve

$$\frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = \frac{z-c}{C}.$$

D'où, par les propriétés connues des rapports égaux,

$$\frac{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}{A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)} = \pm\frac{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

ou
$$\frac{u^2}{-(Aa+Bb+Cc+D)} = \pm\frac{u}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

D'où
$$u = \frac{Aa+Bb+Cc+D}{\mp\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

14. Maximum et minimum de la distance d'un point donné à une sphère donnée.

Soient a, b, c les coordonnées du point donné; x, y, z les coordonnées courantes des points de la sphère; α, β, γ les coordonnées de son centre; R son rayon.

On aura à chercher le maximum et le minimum de

$$u = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2},$$

l'équation de la sphère

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 = R^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

liant les variables.

La règle fournit les équations différentielles

$$(x-a)\,dx + (y-b)\,dy + (z-c)\,dz = o \quad . \quad . \quad (2),$$
$$(x-\alpha)\,dx + (y-\beta)\,dy + (z-\gamma)\,dz = o \quad . \quad . \quad (3).$$

Soustrayant ces deux équations, on trouve que l'une d'elles, (2), peut être remplacée par

$$(a-\alpha)\,dx + (b-\beta)\,dy + (c-\gamma)\,dz = o \quad . \quad . \quad (4).$$

Multipliant (4) par le facteur indéterminé λ, retranchant (5) et égalant à o les coefficients des différentielles, on trouve

$$\frac{x-\alpha}{a-\alpha}=\frac{y-\beta}{b-\beta}=\frac{z-\gamma}{c-\gamma}=\pm\frac{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}{\sqrt{(a-x)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}}.$$

D'où, en représentant par D la distance du point donné au centre de la sphère, laquelle est

$$\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2},$$

$$x-\alpha=\pm\frac{R}{D}(a-\alpha),$$

$$y-\beta=\pm\frac{R}{D}(b-\beta),$$

$$z-\gamma=\pm\frac{R}{D}(c-\gamma).$$

Et, par substitution, $u=D\pm R$.

Le signe supérieur correspond au maximum, le signe inférieur au minimum.

15. La surface $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$ (1) est coupée par le plan $lx+my+nz=o$. Trouver le maximum et le minimum de la distance du centre de la surface à un point du périmètre de la section.

En représentant par r la distance dont il s'agit, il faudra déterminer le maximum et le minimum de

$$r^2=x^2+y^2+z^2,$$

les variables x, y, z étant liées par les deux équations de la surface et du plan. En opérant comme dans l'exemple III, on trouvera pour déterminer le maximum et le minimum de r l'équation

$$\frac{l^2}{r^2-a^2}+\frac{m^2}{r^2-b^2}+\frac{n^2}{r^2-c^2}=o.$$

(1) est la *surface d'élasticité* et l'équation précédente sert

à trouver les vitesses de l'onde propagée dans un milieu cristallisé. (Fresnel et Herschell.)

16. Un paraboloïde elliptique est coupé par un plan perpendiculaire à l'axe. Trouver le plus grand parallélipipède rectangle que l'on puisse inscrire dans la portion de paraboloïde déterminée par le plan sécant.

Soient a la distance du plan au sommet du paraboloïde; x, y, z les coordonnées de l'un des points communs au paraboloïde et au parallélipipède.

Il faudra chercher le maximum de

$$u = 4(a - x)\, yz \text{ (volume du parallélipipède)},$$

x, y, z étant liés par l'équation du paraboloïde

$$\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} = x.$$

On trouvera que, pour

$$x = \frac{a}{2},\ y = \left(\frac{ap}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } z = \left(\frac{aq}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

le maximum est

$$u = a^2 \sqrt{pq}.$$

Si le paraboloïde était de révolution, on aurait $u = a^2 p$.

17. Trouver l'aire de la section faite dans un hyperboloïde à une nappe par un plan qui passe au centre.

La section est une ellipse dont les axes sont les valeurs maximum et minimum du rayon vecteur

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

les variables x, y et z étant liées

1° par $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, équation de l'hyperboloïde;

2° par $lx + my + nz = 0$, équation du plan sécant.

En opérant comme dans l'exemple III, on trouve pour

déterminer le maximum et le minimum de r l'équation

$$\frac{a^2l^2}{r^2-a^2}+\frac{b^2m^2}{r^2-b^2}-\frac{c^2n^2}{r^2+c^2}=o.$$

Ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de r^2 et divisant par le coefficient de $(r^2)^2$, on trouve que le dernier terme, produit des deux racines, est

$$-\frac{a^2b^2c^2}{a^2l^2+b^2m^2-c^2n^2}$$

Donc l'aire cherchée est

$$\frac{\pi abc}{\sqrt{a^2l^2+b^2m^2-c^2n^2}}.$$

18. Trouver la surface de l'ellipse dont l'équation est

$$A(x-\alpha)^2+2B(x-\alpha)(y-\beta)+C(y-\beta)^2+1=o \quad (1),$$

α et β désignant les coordonnées du centre.

Les axes de l'ellipse cherchée sont les valeurs maximum et minimum du rayon vecteur dont le carré est

$$r^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta,$$

θ étant l'angle des axes et x, y, z étant liés par l'équation de la courbe.

Égalant à o la différentielle totale de r, différentiant (1) et faisant usage du multiplicateur indéterminé λ, on trouve que les coefficients de dx et de dy, égalés à o, donnent

$$\lambda\left[(x-\alpha)+(y-\beta)\cos\theta\right]+A(x-\alpha)+B(y-\beta)=o,$$

$$\lambda\left[(y-\beta)+(x-\alpha)\cos\theta\right]+C(y-\beta)+B(x-\alpha)=o.$$

Multipliant la première de ces équations par $x-\alpha$, la seconde par $y-\beta$ et additionnant, on trouve

$$\lambda r^2-1=o, \text{ d'où } \lambda=\frac{1}{r^2}.$$

Substituant cette valeur de λ dans les deux équations, on peut écrire les résultats comme suit :

$$\left(\frac{1}{r^2}+\mathrm{A}\right)(x-\alpha)+\left(\frac{1}{r^2}\cos\theta+\mathrm{B}\right)(y-\beta)=o,$$

$$\left(\frac{1}{r^2}\cos\theta+\mathrm{B}\right)(x-\alpha)+\left(\frac{1}{r^2}+\mathrm{C}\right)(y-\beta)=o.$$

Pour éliminer $x-\alpha$ et $y-\beta$, il suffit de remarquer que les seconds membres de ces équations étant nuls, le dénominateur commun de $x-\alpha$ et $y-\beta$ doit être nul aussi, ce qui fournit

$$\left(\frac{1}{r^2}+\mathrm{A}\right)\left(\frac{1}{r^2}+\mathrm{C}\right)-\left(\frac{1}{r^2}\cos\theta+\mathrm{B}\right)^2=o.$$

D'où

$$(\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2)\,r^4+(\mathrm{A}+\mathrm{C}-2\mathrm{B}\cos\theta)\,r^2+\sin^2\theta=o.$$

Après avoir divisé par $\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2$, on voit que le dernier terme de cette équation, produit des racines, est $\frac{\sin^2\theta}{\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2}$ et que, par conséquent, l'aire cherchée est $\frac{\pi\sin\theta}{\sqrt{\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2}}$.

19. Trouver le volume de l'ellipsoïde dont l'équation est

$$ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'xz+2b''xy=c. \quad (1).$$

Les axes principaux de l'ellipsoïde sont les valeurs maximum et minimum du rayon vecteur

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \ldots\ldots \quad (2),$$

les variables étant liées par l'équation (1).

En égalant à o la différentielle de (2), différentiant (1) et faisant usage du multiplicateur indéterminé λ, les coefficients de dx, dy, dz égalés à o donnent

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda x+ax+b'z+b''y=o,\\ \lambda y+a'y+bz+b''x=o,\\ \lambda z+a''z+by+b'x=o.\end{array}\right. \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Multipliant ces équations respectivement par x, y, z et additionnant, on trouve

$$\lambda = -\frac{c}{r^2}.$$

Substituant cette valeur de λ dans les équations (3), il vient

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{c}{r^2} - a\right)x - b''y - b'z = o, \\ &b''x - \left(\frac{c}{r^2} - a'\right)y + bz = o, \\ &b'x + by - \left(\frac{c}{r^2} - a''\right)z = o. \end{aligned}\right. \quad \ldots \quad (4).$$

Pour éliminer x, y, z, même remarque que dans l'exercice précédent, ce qui fournit

$$\left(\frac{c}{r^2} - a\right)\left(\frac{c}{r^2} - a'\right)\left(\frac{c}{r^2} - a''\right) - b^2\left(\frac{c}{r^2} - a\right) - b'^2\left(\frac{c}{r^2} - a'\right)$$
$$- b''^2\left(\frac{c}{r^2} - a''\right) - 2bb'b'' = o.$$

Ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de r^2 et observant que le dernier terme est le produit des racines, et par conséquent celui des carrés des axes principaux, on trouve pour le volume cherché

$$\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{c^{\frac{3}{2}}}{(aa'a'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2 + 2bb'b'')^{\frac{1}{2}}}.$$

20. Trouver la plus petite ellipse que l'on puisse circonscrire à un triangle donné.

Soient OXY le triangle donné; $OX = a$, $OY = b$ et l'angle $YOX = \theta$. En prenant O pour origine, OX et OY pour axes des x et des y, et représentant par α et β les coordonnées du centre de l'ellipse cherchée, l'équation de cette courbe peut s'écrire

$$A(x - \alpha)^2 + 2B(x - \alpha)(y - \beta) + C(y - \beta)^2 + 1 = o. \quad (1).$$

En exprimant que la courbe doit passer par les points O, X et Y, on obtient trois équations qui fournissent pour les coefficients A, B et C :

$$A = -\frac{2\beta - b}{\alpha(\alpha b + \beta a - ab)},$$

$$B = \frac{(2\alpha - a)(2\beta - b)}{2\alpha\beta(\alpha b + \beta a - ab)},$$

$$C = -\frac{2\alpha - a}{\beta(\alpha b + \beta a - ab)}.$$

L'aire de l'ellipse (1) est

$$\frac{\pi \sin\theta}{(AC - B^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{(voir l'exercice 18.)}$$

expression qui sera un minimum si $AC - B^2$ est un maximum. Substituant les valeurs de A, B, C dans $AC - B^2$ et cherchant quelles sont les valeurs de α et de β qui correspondent au maximum de la quantité résultante, on trouve

$$\alpha = \frac{a}{3} \text{ et } \beta = \frac{b}{3}.$$

Par suite,

$$A = -\frac{3}{a^2}, \ B = -\frac{3}{2ab}, \ C = -\frac{3}{b^2}.$$

L'aire cherchée est donc

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} ab \sin\theta.$$

(Euler, *Solution de Bérard*.)

CHAPITRE XI.

TANGENTES ET NORMALES DES COURBES PLANES.

En désignant par x' et y' les coordonnées courantes; par x et y celles du point de contact de la tangente; par S_t, S_n, T et N, la sous-tangente, la sous-normale, la tangente et la normale, on a

A. *En coordonnées rectilignes rectangulaires.*

α. L'équation de la courbe étant de la forme $y = f(x)$.

(1) $y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x)$, équation de la tangente;

(2) $y' - y = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(x' - x)$, équation de la normale;

$$S_t = \frac{y}{\frac{dy}{dx}} \quad . . (3); \qquad S_n = y\frac{dy}{dx} \quad . . (4);$$

$$T = y\sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \quad . . (5); \quad N = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (6);$$

et, p désignant la perpendiculaire menée de l'origine sur la tangente,

$$p = \frac{y - x\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \quad . . . . . . (7).$$

β. L'équation de la courbe étant de la forme $F(x, y) = o$.

$$(8)\ (y' - y)\frac{dF}{dy} + (x' - x)\frac{dF}{dx} = o, \text{ équation de la tangente;}$$

$$(9)\ (y' - y)\frac{dF}{dx} - (x' - x)\frac{dF}{dy} = o, \text{ équation de la normale;}$$

$$S_t = -y\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dx}} \ldots (10);\ S_n = -y\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}} \ldots (11);$$

$$T = y\sqrt{1 + \left(\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dx}}\right)^2}\ (12);\ N = y\sqrt{1 + \left(\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}\right)^2}\ (13);$$

$$p = \frac{x\frac{dF}{dx} + y\frac{dF}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}} \ldots (14).$$

B. *En coordonnées polaires.*

t et r représentant l'angle polaire et le rayon vecteur, μ l'angle de la tangente et du rayon vecteur,

$$S_n = \frac{dr}{dt} \ldots (15),\ S_t = \frac{r^2}{\frac{dr}{dt}} \ldots (16),$$

$$T = r\sqrt{1 + \frac{r^2}{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}}\ (17),\ N = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2}.\ (18),$$

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{r}{\frac{dr}{dt}} \ldots (19),\ p = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2}} \ldots (20).$$

Exemple I.

Trouver les éléments principaux de l'ellipse dont l'équation est

$$F = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = o.$$

En dérivant, on trouve

$$\frac{dF}{dx} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{dF}{dy} = \frac{2y}{b^2};$$

et, en remplaçant $\frac{dF}{dx}$ et $\frac{dF}{dy}$ par leurs valeurs, on tire successivement :

1° De l'équation (8),

$$(y' - y)\frac{2y}{b^2} + (x' - x)\frac{2x}{a^2} = o,$$

ou

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1,$$

pour équation de la tangente.

2° De l'équation (9),

$$(y' - y)\frac{2x}{a^2} - (x' - x)\frac{2y}{b^2} = o,$$

ou

$$\frac{(y' - y)x}{a^2} = \frac{(x' - x)y}{b^2},$$

pour équation de la normale.

3° De l'équation (10),

$$S_t = -y\frac{\frac{2y}{b^2}}{\frac{2x}{a^2}} = -\frac{a^2 - x^2}{x}.$$

4° De l'équation (11),

$$S_n = -y\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}} = -\frac{b^2}{a^2}x.$$

5° De l'équation (12),

$$T = y\sqrt{1 + \left(\frac{\frac{2y}{b^2}}{\frac{2x}{a^2}}\right)^2} = a^2 . \frac{y}{x}\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}} .$$

6° De l'équation (13),

$$N = y\sqrt{1 + \left(\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}}\right)^2} = b^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}} .$$

7° De l'équation (14),

$$p = \frac{x . \frac{2x}{a^2} + y . \frac{2y}{b^2}}{\sqrt{\left(\frac{2x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{2y}{b^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}} .$$

Ces éléments peuvent servir à en calculer d'autres.

Ainsi, en faisant tour à tour $y' = o$ et $x' = o$ dans l'équation de la tangente, on trouve que les distances de l'origine aux points où la tangente coupe les axes des x et des y sont

$$x' = \frac{a^2}{x} \text{ et } y' = \frac{b^2}{y} .$$

Il en résulte que la surface du triangle compris entre la tangente et les axes est $\frac{a^2b^2}{2xy}$, et que la portion de tangente interceptée par les axes est

$$\sqrt{\frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2}} .$$

De l'expression de p, on tire

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}} = \frac{1}{p}$$

et, par suite, la portion de tangente trouvée peut s'écrire $\frac{a^2b^2}{pxy}$ et la longueur de la tangente, $\frac{a^2y}{px}$.

La soustraction donne

$$\frac{a^2b^2}{pxy} - \frac{a^2y}{px} = \frac{a^2}{pxy}(b^2 - y^2) = \frac{b^2x}{py}.$$

Le produit des portions de tangente comprises entre le point de contact et les axes est donc

$$\frac{a^2y}{px} \times \frac{b^2x}{py} = \frac{a^2b^2}{p^2}.$$

On calculerait facilement encore que la distance du foyer à la tangente a pour expression

$$\frac{a^2b^2}{p(a^2 + cx)}, \text{ c étant égal à } \sqrt{a^2 - b^2},$$

et que l'abcisse et l'ordonnée du point où cette perpendiculaire rencontre la tangente sont respectivement

$$\frac{a^2(c + x)}{a^2 + cx} \text{ et } \frac{a^2y}{a^2 + cx}.$$

La distance du centre de l'ellipse à ce point est, par conséquent,

$$\sqrt{\frac{a^4(c + x)^2}{(a^2 + cx)^2} + \frac{a^4y^2}{(a^2 + cx)^2}} = a,$$

comme on le trouve en géométrie analytique.

Exemple II.

Calculer les éléments principaux de la spirale logarithmique dont l'équation est

$$r = ae^{mt}.$$

1° L'équation (15) donne, puisque $\frac{dr}{dt} = mae^{mt}$,

$$S_n = mae^{mt} = mr.$$

Il en résulte que le lieu des extrémités de la sous-normale est une spirale semblable à la proposée.

2° L'équation (16) fournit

$$S_t = \frac{r^2}{mr} = \frac{r}{m} = \frac{1}{m} ae^{mt}.$$

Le lieu des extrémités de la sous-tangente est donc encore une spirale semblable à la proposée.

3° D'après l'équation (17),

$$T = r\sqrt{1 + \frac{r^2}{m^2r^2}} = \frac{r}{m}\sqrt{1 + m^2}.$$

4° En faisant usage de l'équation (18), on trouve

$$N = \sqrt{r^2 + m^2r^2} = r\sqrt{1 + m^2}.$$

5° On obtient, équation (19),

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{r}{mr} = \frac{1}{m}.$$

L'angle de la tangente et du rayon vecteur est donc constant.

6° Enfin, en employant l'équation (20), on obtient

$$p = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + m^2r^2}} = \frac{r}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Exercices.

1. La somme des distances de l'origine aux points où la tangente rencontre les axes est constante dans la courbe

$$y = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2.$$

On trouve, en effet, que la somme cherchée est a.

2. La tangente à la courbe

$$\frac{x + \sqrt{a^2 - y^2}}{a} = \log \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

est constante.

En effet, on obtient, $T = a$.

3. Dans la courbe dont l'équation est

$$e^{\frac{y}{a}} = x^2 - a^2,$$

la somme de la tangente et de la sous-tangente est proportionnelle au rectangle des coordonnées du point de contact.

La somme dont il s'agit est $\frac{xy}{a}$.

4. Dans la spirale hyperbolique dont l'équation est

$$r = \frac{a}{t}$$

le lieu de l'extrémité de la sous-tangente est un cercle.

On trouve $\qquad S_t = a.$

5. La courbe qui a pour équation

$$4by = 4abx - (a^2 + 1)\, x^2$$

fait avec l'axe des abcisses deux angles supplémentaires l'un de l'autre.

$x = o$ et $x = \frac{4ab}{a^2 + 1}$ sont les abcisses des points où la courbe rencontre l'axe en question et, pour ces valeurs de x, on trouve

$$\frac{dy}{dx} = a \text{ et } \frac{dy}{dx} = -a.$$

6. L'aire du triangle compris entre la tangente à l'hyperbole $xy = k^2$ et les axes-asymptotes est constante.

L'expression de cette aire est $2k^2$.

7. Le centre d'une ellipse coïncide avec le sommet d'une parabole et le grand axe de la première courbe est perpendiculaire à l'axe de la seconde. Pour que l'ellipse coupe la parabole à angles droits, quelle doit être son excentricité?

Soient $\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ et } x^2 = 2py$

les équations de l'ellipse et de la parabole.

Les coefficients angulaires des tangentes aux courbes, aux points communs, sont respectivement

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y} \text{ et } \frac{dy}{dx} = \frac{x}{p}$$

et la condition de perpendicularité des tangentes fournit aisément pour l'excentricité e cherchée

$$e = \frac{\sqrt{py}}{x}.$$

8. Dans la spirale dont l'équation est

$$r^n = a^n \sin nt,$$

l'angle de deux tangentes menées aux extrémités d'une corde passant par le pôle est constant.

En effet, on trouve $\mu = nt$ et, en désignant par μ' l'angle correspondant à $t + \pi$, $\mu' = n(t + \pi)$.

La différence de ces deux angles, ou l'angle des tangentes dont il s'agit, est donc $n\pi$.

9. Dans l'hypocycloïde

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

prouver que la portion de tangente interceptée par les axes est constante et chercher l'expression de la perpendiculaire menée de l'origine sur la tangente.

La portion de tangente est a

et

$$p = (axy)^{\frac{1}{3}}.$$

10. Dans la cardioïde

$$r = a(1 - \cos t),$$

l'angle du rayon vecteur et de la tangente est la moitié de celui que le rayon fait avec l'axe polaire, et les cordes passant par le pôle sont de longueur constante.

On trouve

$$\mu = \frac{1}{2} t.$$

D'autre part, en désignant par r' le rayon vecteur de même direction que r, mais de sens opposé, on a

$$r' = a\left[1 - \cos(t + \pi)\right] = a(1 + \cos t).$$

Donc, $r + r' = 2a$.

11. Distance du pôle à la tangente et angle de celle-ci avec le rayon vecteur dans la courbe dont l'équation est

$$r = a(\sec t - \tang t).$$

On trouve

$$\tang \mu = -\frac{2ar}{a^2 + r^2}, \; p = \frac{2ar^2}{\sqrt{a^4 + 6a^2r^2 + r^4}}.$$

12. Éléments principaux de la courbe logarithmique dont l'équation est

$$y = ce^{\frac{x}{a}}.$$

On trouve

$$\frac{y' - y}{y} = \frac{x' - x}{a}, \text{ pour équation de la tangente;}$$

$$\frac{y' - y}{a} = -\frac{x' - x}{y}, \text{ pour équation de la normale;}$$

$$S_t = a; \; S_n = \frac{y^2}{a}; \; T = \sqrt{a^2 + y^2}; \; N = \frac{y}{a}\sqrt{a^2 + y^2};$$

$$p = \frac{y(a - x)}{\sqrt{a^2 + y^2}}.$$

13. Éléments principaux de la cissoïde de Dioclès

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x}.$$

$$y' - y = \frac{x^{\frac{1}{2}}(3a - 2x)}{2(a - x)^{\frac{3}{2}}}(x' - x) \text{ est l'équation de la tangente;}$$

$$y' - y = -\frac{2(a - x)^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}(3a - 2x)}(x' - x), \text{ l'équation de la normale;}$$

$$S_t = \frac{2x(a-x)}{3a+2x}; \quad S_n = \frac{x^2(3a-2x)}{2(a-x)^2};$$

$$T = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3a-2x}\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}}; \quad N = \frac{ax}{2(a-x)^2}\sqrt{x(4a-3x)};$$

$$p = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4a-3x}}.$$

14. Éléments principaux de la cycloïde

$$x = a \,.\, \text{arc cos}\, \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay-y^2}.$$

On obtient

$$y'-y = \sqrt{\frac{2a-y}{y}}(x'-x), \text{ pour équation de la tangente;}$$

$$y'-y = -\sqrt{\frac{y}{2a-y}}(x'-x), \text{ pour équation de la normale;}$$

$$S_t = y\sqrt{\frac{y}{2a-y}}; \quad S_n = \sqrt{2ay-y^2};$$

$$T = y\sqrt{\frac{2a}{2a-y}}; \quad N = \sqrt{2ay};$$

$$p = \frac{y\sqrt{y} - x\sqrt{2a-y}}{\sqrt{2a}}.$$

15. Éléments principaux de la chaînette

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

On obtient

$$\frac{y'-y}{\sqrt{y^2-a^2}} = \frac{x'-x}{a}, \text{ pour équation de la tangente;}$$

$$\frac{y'-y}{a} = -\frac{x'-x}{\sqrt{y^2-a^2}}, \text{ pour équation de la normale;}$$

$$S_n = \frac{a}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right);\ S_t = \frac{ay}{\sqrt{y^2-a^2}};$$

$$N = \frac{y^2}{a};\ T = \frac{y^2}{\sqrt{y^2-a^2}};\ p = a - \frac{x}{y}\sqrt{y^2-a^2}.$$

Quand $x = o$, $p = a$.

16. Éléments principaux de la circonférence dont un des points est pris pour pôle.

La circonférence a pour équation $r = a\cos t$.

$$S_n = -\sqrt{a^2-r^2},\ S_t = -\frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}},$$

$$T = \frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}},\ N = a,$$

$$\operatorname{tang}\mu = -\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}},\ p = \frac{r^2}{a}.$$

17. Éléments principaux de la lemniscate

$$r^2 = a^2\cos 2t.$$

En représentant $\sqrt{a^4-r^4}$ par R, on obtient :

$$S_n = -\frac{R}{r},\ S_t = -\frac{r^3}{R},\ T = \frac{a^2 r}{R},$$

$$N = \frac{a^2}{r},\ \operatorname{tang}\mu = -\frac{r^2}{R},\ p = \frac{r^3}{a^2}.$$

18. Éléments principaux de la spirale elliptique

$$\sqrt{a^2-b^2}\,t = a\,.\,\text{arc}\cos\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{r}.$$

En représentant par R la quantité $\sqrt{r^2-(a^2-b^2)}$, on trouve

$$S_n = \frac{r}{a}R,\ S_t = \frac{ar}{R},\ T = \frac{r\sqrt{b^2+r^2}}{R},$$

$$N = \frac{r}{a}\sqrt{b^2+r^2},\ \operatorname{tang}\mu = \frac{a}{R},\ p = \frac{ar}{\sqrt{b^2+r^2}}.$$

CHAPITRE XII.

ASYMPTOTES.

Soit $y = f(x)$ l'équation d'une courbe rapportée à des coordonnées rectilignes.

Si l'on peut développer $f(x)$ suivant les puissances descendantes de x de sorte que

$$y = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0 + a_{-1}\frac{1}{x} + a_{-2}\frac{1}{x^2} + \text{etc.},$$

alors les termes qui contiennent x en dénominateur sont nuls pour $x = \infty$ et l'équation de l'asymptote est

$$y = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0,$$

c'est-à-dire une courbe de degré quelconque.

Le cas le plus important dans les applications est celui où l'asymptote est une ligne droite, où l'équation précédente se réduit à

$$y = a_1 x + a_0.$$

Dans ce cas, on peut encore, au moyen de l'équation de la courbe, déterminer les coefficients a_1 et a_0 de l'asymptote, sachant d'après la théorie que, pour $x = \infty$,

$$a_1 = \text{limite de } \frac{y}{x},$$

$$a_0 = \text{limite de } (y - a_1 x).$$

Enfin, en considérant l'asymptote rectiligne comme limite des tangentes, on peut, après avoir obtenu l'équation de la tangente à la courbe, déterminer ce que deviennent l'abscisse et l'ordonnée de cette droite à l'origine

quand $x = \infty$; éléments suffisants pour fixer la position de l'asymptote et parvenir à son équation.

Quant aux asymptotes parallèles à l'axe des y, si l'équation de la courbe peut être ramenée à la forme $y = f(x)$ et que k soit une des valeurs de x pour laquelle $y = \infty$, l'équation de l'asymptote est

$$x = k.$$

Si l'équation de la courbe ne peut être résolue par rapport à y, on en tire la limite de $\frac{x}{y}$ quand $y = \infty$, et, si cette limite est nulle, l'équation de l'asymptote mise sous la forme

$$x = b_1 y + b_0$$

fournit, par substitution, l'asymptote parallèle.

Des procédés inverses fournissent les asymptotes parallèles à l'axe des x.

Dans le cas où l'équation de l'asymptote est de la forme

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

la théorie enseigne que l'équation de la courbe fournit, pour $x = \infty$,

$$a_2 = \lim. \frac{y}{x^2},$$

$$a_1 = \lim. \frac{y - a_2 x^2}{x},$$

$$a_0 = \lim. (y - a_2 x^2 + a_1 x).$$

Etc.

Soit $F(r, t) = o$ l'équation d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires. Si l'on représente par α l'angle de l'asymptote rectiligne avec l'axe polaire et par δ la distance de l'asymptote à une droite parallèle menée par le pôle, on a, pour $r = \infty$,

$$\alpha = \lim. t,$$

$$\delta = \lim. r(t - \alpha),$$

limites que l'on détermine au moyen de l'équation de la

courbe et qui suffisent pour fixer la position de l'asymptote.

Comme applications des moyens que l'on emploie pour trouver les asymptotes rectilignes des courbes, on démontre dans les cours les propositions suivantes :

1. Quand l'équation d'une courbe peut être mise sous la forme

$$x^m\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x^n\psi\left(\frac{y}{x}\right)+x^p\chi\left(\frac{y}{x}\right)+\text{etc.}=o\quad(m>n>p,\ \text{etc.}),$$

les valeurs limites de $\frac{y}{x}$, c'est-à dire celles de a_1, sont les racines réelles de l'équation

$$\varphi(a_1)=o$$

et l'on a

$$a_o=-\frac{\psi(a_1)}{\varphi'(a_1)}.$$

Que si $\psi(a_1)=o$ et $\varphi'(a_1)=o$, les valeurs de a_o sont fournies par l'équation

$$a_o^2\frac{\varphi''(a_1)}{2}+a_o\psi'(a_1)+\chi(a_1)=o.$$

Etc.

2. Quand l'équation d'une courbe de degré m est ramenée à la forme

$$\varphi(x)\,y^n+\psi(x)\,y^{n-1}+\chi(x)\,y^{n-2}+\text{etc.}=o,\quad(n<m)$$

les racines réelles de l'équation

$$\varphi(x)=o$$

déterminent toujours, si elles n'annullent point $\psi(x)$, les asymptotes parallèles à l'axe des y

3. Étant donnée l'équation des courbes polaires

$$\varphi(t)\,r^m+\psi(t)\,r^{m-1}+\chi(t)\,r^{m-2}+\text{etc.}=o,$$

l'équation $\qquad \varphi(\alpha)=o$

détermine, par ses racines réelles, les directions des asymptotes et l'on a

$$\lim.\,r(t-\alpha)=-\frac{\psi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}.$$

Exemple I.

Soit proposé de trouver les asymptotes de la courbe dont l'équation est

$$x^3 - y(x - a) = o.$$

Cette équation peut s'écrire

$$y = \frac{x^3}{x - a},$$

et l'on voit que $x = a$ donne $y = \infty$. Donc la courbe a d'abord une asymptote rectiligne parallèle à l'axe des y et dont l'équation est

$$x = a.$$

En effectuant la division de x^3 par $x - a$, on obtient

$$y = x^2 + ax + a^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^4}{x^2} + \text{etc.},$$

c'est-à-dire y développé suivant les puissances descendantes de x.

Donc la courbe proposée a une asymptote parabolique dont l'équation est

$$y = x^2 + ax + a^2$$

ou

$$y - \frac{3a^2}{4} = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2.$$

Exemple II.

Chercher les asymptotes des courbes du deuxième degré, renfermées dans l'équation générale

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = o.$$

En réunissant dans un seul les termes du deuxième degré et dans un seul ceux du premier, l'équation peut s'écrire

$$x^2\left(A\frac{y^2}{x^2} + B\frac{y}{x} + C\right) + x\left(D\frac{y}{x} + E\right) + F = o.$$

Les valeurs de a_1 sont donc les racines réelles de l'équation

$$Aa_1^2 + Ba_1 + C = o,$$

c'est-à-dire

$$a_1 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Or, dans l'ellipse, $B^2 - 4AC$ est négatif, ce qui donne des valeurs de a_1 imaginaires. L'ellipse n'a donc point d'asymptotes.

On a ensuite

$$a_0 = -\frac{Da_1 + E}{2Aa_1 + B}$$

et, par conséquent, pour équation des asymptotes,

$$y = a_1 x - \frac{Da_1 + E}{2Aa_1 + B},$$

équation dans laquelle il faudrait remplacer a_1 par ses valeurs.

Dans la parabole, $B^2 - 4AC = o$ et les valeurs de a_1 se réduisent à une seule, $a_1 = -\frac{B}{2A}$. Or, pour cette valeur de a_1, le dernier terme de l'équation de l'asymptote devient infini. Donc l'hyperbole est la seule courbe du deuxième degré qui ait des asymptotes.

Exemple III.

Soit

$$y^3 = ax^2 + x^3$$

l'équation d'une courbe dont il faille chercher les asymptotes.

L'équation de la tangente à la courbe est

$$y' - y = \frac{2ax + 3x^2}{3y^2}(x' - x).$$

En posant $x' = o$, on trouve pour ordonnée à l'origine de cette droite

$$y' = y - \frac{2ax^2 + 3x^3}{3y^2} = \frac{3(y^3 - x^3) - 2ax^2}{3y^2},$$

et, en faisant $y' = o$, on obtient pour abcisse à l'origine

$$x' = x - \frac{3y^3}{2ax + 3x^2} = \frac{2ax^2 - 3(y^3 - x^3)}{2ax + 3x^2}.$$

Les expressions précédentes, à cause de $y^3 - x^3 = ax^2$, valeur tirée de l'équation de la courbe, deviennent

$$y' = \frac{a}{3}\frac{x^2}{y^2} \quad \text{et} \quad x' = -\frac{ax^2}{2ax + 3x^2} = -\frac{a}{\frac{2a}{x} + 3}.$$

Or, pour $x = \infty$, on voit que

$$-\frac{a}{\frac{2a}{x} + 3} = -\frac{a}{3}$$

et que d'ailleurs, y étant égal à ∞ quand $x = \infty$, la fraction $\frac{x^2}{y^2}$ a pour limite 1, d'où limite $\frac{a}{3} \cdot \frac{x^2}{y^2} = \frac{a}{3}$.

L'ordonnée à l'origine de l'asymptote est donc $\frac{a}{3}$, l'abcisse à l'origine $-\frac{a}{3}$ et, par suite, l'équation de l'asymptote

$$\frac{x}{-\frac{a}{3}} + \frac{y}{\frac{a}{3}} = 1 \quad \text{ou} \quad y = x + \frac{a}{3},$$

droite faisant un angle de 45° avec l'axe des x.

Exemple IV.

L'équation d'une courbe étant

$$y^4 - x^4 + 2ax^2y = o,$$

déterminer les asymptotes.

Posant $y = xz$. $\left(\text{d'où } z = \frac{y}{x} \text{ et lim. } \frac{y}{x} = \text{lim. } z\right)$

l'équation devient

$$x^4z^4 - x^4 + 2ax^3z = o \text{ ou } xz^4 - x + 2az = o.$$

D'où
$$x = \frac{2az}{1 - z^4} \text{ et, par suite, } y = \frac{2az^2}{1 - z^4},$$

expressions qui font voir que les valeurs de x et de y deviennent infinies quand $z = \pm 1$. On a donc d'abord

$$\text{lim. } \frac{y}{x} = a_n = \pm 1.$$

D'autre part, l'équation de la tangente à la courbe proposée est

$$y' - y = \frac{2x^3 - 2axy}{2y^3 + ax^2}(x' - x);$$

ce qui donne, quand $x' = o$,

$$y' = \frac{2(y^4 - x^4) + 3a^2xy}{2y^3 + ax^2} = - \frac{ax^2y}{2y^3 + ax^2},$$

en vertu de l'équation de la courbe.

En remplaçant y par xz, on a donc pour expression de l'ordonnée à l'origine de la tangente

$$y' = - \frac{ax^3z}{2x^3z^3 + ax^2} = - \frac{az}{2z^3 + \frac{a}{x}},$$

et, pour celle de l'asymptote correspondante à $x = \infty$, et, par conséquent, à $z = \pm 1$,

$$a_o = - \frac{a}{2}.$$

L'équation des asymptotes est par conséquent

$$y = \pm x - \frac{a}{2}.$$

Le procédé particulier employé dans cet exemple peut souvent être suivi.

Exemple V.

Supposons qu'il s'agisse de voir si la courbe représentée par l'équation

$$x^4y^4 - (x^2 - y^2)^2 + y^2 - 1 = o$$

a des asymptotes parallèles à l'axe des y.

Ordonnée par rapport à y, cette équation est

$$(x^4 - 1)\, y^4 + (2x^2 + 1)\, y^2 - x^4 - 1 = o$$

et les racines réelles ± 1 de l'équation

$$x^4 - 1 = o$$

n'annullent point $2x^2 + 1$.

Donc la courbe proposée a deux asymptotes parallèles à l'axe des y, renfermées dans l'équation double $x = \pm 1$.

Exemple VI.

L'équation de l'hyperbole rapportée à un de ses foyers est

$$r = \frac{b^2}{a - c\cos t}, \text{ c étant égal à } \sqrt{a^2 + b^2}.$$

En l'écrivant

$$(a - c\cos t)\, r - b^2 = o,$$

l'équation

$$a - c\cos\alpha = o$$

détermine les angles des asymptotes avec l'axe polaire.

On a donc pour ces angles

$$\cos\alpha = \frac{a}{c}.$$

D'autre part,

$$\lim. r\,(t - \alpha) = - \frac{-b^2}{c\sin\alpha},$$

et, en remplaçant $\sin\alpha$ par sa valeur $\frac{b}{c}$,

$$\lim. r\,(t - \alpha) = b,$$

distance des asymptotes à deux droites parallèles menées par le foyer.

Exercices.

1. $(a^2 - x^2) y^2 = (a^2 + x^2) x^2$.

Deux asymptotes parallèles à l'axe des y :

$$x = \pm a.$$

2. $ax^3 + x^3 y - ay^3 = o$.

Asymptote parallèle à l'axe des x :

$$y = -a.$$

3. $(a + b + x) y = c(b + x)$.

Une asymptote parallèle à l'axe des y :

$$x = -a - b,$$

et une autre à l'axe des x :

$$y = c.$$

4. $(x + a) y^2 = x + 2a$.

Une asymptote parallèle à l'axe des y :

$$x = -a,$$

et deux autres parallèles à l'axe des x :

$$y = \pm 1.$$

5. $x^3 + y^3 = a^3$.

L'équation de l'asymptote est

$$y = -x,$$

droite qui fait avec l'axe des x un angle égal à $\frac{3\pi}{2}$.

6. $y = a \frac{\sin x}{x}$.

L'axe des x est asymptote à cette courbe et celle-ci passe alternativement d'un côté et de l'autre de son asymptote jusqu'à ce qu'elle lui devienne tangente à l'infini.

7. $y = \sin \frac{a}{x}$.

L'axe des x est asymptote.

8. $(x + 1)y = (x - 1)x$.

En procédant comme dans l'exemple II, on trouve pour équation de l'asymptote

$$y = x - 2.$$

9. $(x - 2)y = (x - 1)(x - 3)$.

Équation de l'asymptote :

$$y - x + 2 = o. \qquad \text{(Exemple II.)}$$

10. $y^2 = \cos \frac{y}{x}$.

Deux asymptotes parallèles à l'axe des x :

$$y = \pm 1.$$

11. $y = \frac{x^3 - 3ax^2 + a^3}{x^2 - 3bx + 2b^2}$.

Deux asymptotes parallèles à l'axe des y :

$$x = 2b \text{ et } x = b.$$

Une troisième asymptote :

$$y = x - 3(a - b).$$

On la trouve par développement. (Exemple I.)

12. $\frac{y^2}{y^2 + x^2} = \frac{(y - b)^2}{m^2}$. (Conchoïde.)

Asymptote parallèle à l'axe des x :

$$y = b.$$

13. $xy^2 - y = ax^3 + bx^2 + cx + e$.

L'axe des y est asymptote et, en procédant comme dans l'exemple II, on trouve les équations de deux autres asymptotes

$$y = + x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}},$$

$$y = - x\sqrt{a} - \frac{b}{2\sqrt{a}}.$$

14. $y^2 = \frac{x^3 + ax^2}{x - a}$.

Par développement de y^2, comme dans l'exemple I, puis extraction de la racine carrée du résultat, on trouve que

$$y = \pm (x + a)$$

est l'équation de deux asymptotes se coupant à angles droits.

Autre asymptote, $x = a$.

15. $y^4 - 2x^2y^2 - x^4 + 2axy^2 - 3ax^3 = 0$.

Le procédé suivi dans l'exemple II fournit aisément

$$y = +x\sqrt{1+\sqrt{2}} + \frac{a}{8}\cdot\frac{3\sqrt{2}-4}{\sqrt{1+\sqrt{2}}},$$

$$y = -x\sqrt{1+\sqrt{2}} - \frac{a}{8}\cdot\frac{3\sqrt{2}-4}{\sqrt{1+\sqrt{2}}},$$

pour équations de deux asymptotes.

16. $(x^2 - 1)y = (x^2 + 1)x$.

Deux asymptotes parallèles à l'axe des y :

$$x = \pm 1$$

et une autre, $y = x$, que l'on trouve facilement en opérant comme dans l'exemple IV.

17. $y^3 - ax^2 + x^3 = 0$.

$$y = -x + \frac{a}{3}$$

est l'équation de l'asymptote. (Exemple IV.)

18. $y^3 - 3axy + x^3 = 0$, (Folium de Descartes.)

En opérant encore comme dans l'exemple IV, on trouve pour équation de l'asymptote

$$y = -x - a.$$

19. $ax^4 - by^4 + c^2xy = o.$

Même procédé que dans les deux exemples précédents, donne

$$y = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{4}} x$$

pour équation de l'asymptote.

20. $ay^3 - bx^3 + c^2xy.$

Le même procédé fournit pour équation de l'asymptote

$$y = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}} \left(x - \frac{c^2}{3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}\right).$$

21. $r = \frac{a \sin^2 t}{\cos t}$. (Équation polaire de la cissoïde.)

On trouve (exemple VI),

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{2}, \ \delta = \pm a;$$

équation de deux asymptotes.

22. $x^3 - xy + a^3 = o.$

Asymptote parabolique :

$$y = x^2.$$

23. $x^4 - y^4 + a^2xy = o.$

En posant $y^4 = y_1$, l'équation fournit

$$y_1 = x^4 + x \,.\, a^2 y_1^{\frac{1}{4}},$$

et, en développant $y_1^{\frac{1}{4}}$ par le théorème de Lagrange, on trouve pour asymptote hyperbolique

$$y = x + \frac{a^2}{4x}.$$

et, pour asymptote rectiligne,

$$y = x.$$

24. $y^3 - 2xy^2 + x^2y - a^3 = 0.$

Deux asymptotes hyperboliques :

$$y - x \mp \sqrt{\frac{a^3}{x}} = 0.$$

CHAPITRE XIII.

POINTS SINGULIERS DES COURBES PLANES.

I. — *Points d'inflexion.*

Soit $y = f(x)$ ou $F(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe plane.

Les coordonnées des points d'inflexion sont les couples de valeurs réelles de x et y satisfaisant à la fois à l'équation de la courbe et à l'une des suivantes :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \infty,$$

1° si, pour deux points de la courbe situés de part et d'autre, mais à des distances infiniment petites, de celui qui est déterminé par chaque couple de valeurs, $\frac{d^2y}{dx^2}$ a des signes différents; 2° si, pour ces mêmes valeurs, $\frac{d^3y}{dx^3}$ n'est pas nul.

Quand la première condition n'est pas remplie, il n'y a pas de point d'inflexion; quand $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, les points d'inflexion sont déterminés par l'équation de la courbe et l'une des suivantes :

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 0, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \infty.$$

Et ainsi de suite.

Lorsque l'équation de la courbe est donnée en coordonnées polaires, les points d'inflexion sont fournis, et par l'équation de la courbe, et par

$$\frac{dp}{dr} = o,$$

p représentant la perpendiculaire menée du pôle sur la tangente.

Il n'y a inflexion que si $\frac{dp}{dr}$ change de signe en passant par o.

Se rappeler que $p = \dfrac{r^2}{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$.

Exemple.

Déterminer les points d'inflexion de la courbe

$$y^2 = ax^2 + bx^3,$$

b étant $> o$ et $a \gtreqless o$.

De l'équation proposée, on tire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a + 3bx}{2(a + bx)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b\,(4a + 3bx)}{4\,(a + bx)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3b^2\,(2a + bx)}{8\,(a + bx)^{\frac{5}{2}}}.$$

Les points d'inflexion, s'il en existe, seront donc déterminés par les équations

$$4a + 3bx = o,$$
$$y^2 = ax^2 + bx^3.$$

D'où les couples de valeurs

$$x = -\frac{4a}{3b} \text{ et } y = -\frac{4a}{9b}\sqrt{-3a} \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

$$x = -\frac{4a}{3b} \text{ et } y = +\frac{4a}{9b}\sqrt{-3a} \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Quand a est $> o$, les valeurs de y sont imaginaires et la courbe n'a pas de points d'inflexion.

Quand $a = o$, les deux couples de valeurs précédentes se réduisent à $x = o$, $y = o$; mais ce n'est pas là un point d'inflexion, parce que $\frac{d^2y}{dx^2}$ qui, dans ce cas, est $\frac{3b^{\frac{1}{2}}}{4x^{\frac{1}{2}}}$, devient imaginaire pour des valeurs de x plus petites que o.

Mais quand a est $< o$, les valeurs de y sont réelles et 1° le $\frac{d^2y}{dx^2}$ change de signe pour des valeurs de x un peu plus petites et un peu plus grandes que $-\frac{4a}{3b}$, 2° le $\frac{d^3y}{dx^3}$ n'est pas nul pour cette valeur de x.

Donc la courbe a, dans ce cas, deux points d'inflexion dont les coordonnées sont les couples de valeurs (1) et (2).

Exercices.

1. $y = \cos mx$, (m positif).

Cette courbe a une infinité de points d'inflexion situés sur l'axe des x et dont les abcisses sont

$$x = \pm\frac{\pi}{2m}, x = \pm\frac{3\pi}{2m}, x = \pm\frac{5\pi}{2m}, \ldots\ldots\ldots x = \frac{(2n+1)\pi}{2m},$$

n étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

2. Déterminer la distance entre deux points d'inflexion consécutifs des courbes $y = \sin mx$ et $y = \operatorname{tang} px$. ($m$ et p positifs.)

La distance cherchée est

$$n\pi\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{p}\right),$$

n étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

3. $y = e^{-\frac{1}{ax}}$.

Un point d'inflexion :

$$x = \frac{1}{2a},\ y = \frac{1}{e^2}.$$

4. Si $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = o$ (1) n'a que des racines réelles, la courbe dont l'équation est $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ a un point d'inflexion dont l'abcisse est le tiers de la somme des racines de (1).

En effet, si l'on désigne par a, b, c les racines réelles de (1), la courbe peut être représentée par l'équation

$$y = (x - a)(x - b)(x - c)$$

et l'on trouve facilement que cette courbe a un point d'inflexion dont l'abcisse est

$$x = \frac{a + b + c}{3}.$$

5. $x^3 - axy - b^2y = o$. (Trident de Newton.)

Point d'inflexion à l'origine.

6. $xy^2 + ax^2 + b^3 = o$.

Si a et b sont de même signe, la courbe a deux points d'inflexion dont les abcisses sont

$$x = \pm b\sqrt{\frac{b}{a}(3 + \sqrt{12})}.$$

Si a et b sont de signes contraires, deux points d'inflexion dont les abcisses sont

$$x = \pm b\sqrt{\frac{b}{a}(3 - \sqrt{12})}.$$

(Cramer.)

7. $a^ny = x^{n+1}$.

Point d'inflexion à l'origine; double, si $n = 2$; triple, si $n = 3$; etc.

8. $y = (ax + b)(ax - b)^{\frac{p}{q}}, \quad \left(\frac{p}{q} < 1\right).$

Deux points d'inflexion :

$$x = \frac{b}{a}, \; y = o;$$

$$x = \frac{b}{a}\frac{3q - p}{p + q}, \; y = \frac{4bq}{p + q}\left(2b.\frac{q - p}{p + q}\right)^{\frac{p}{q}}.$$

9. $r^2 = \frac{a^2}{t}.$

On a

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{r^3}{2a^2} \text{ et, par suite, } p = \frac{2a^2r}{(4a^4 + r^4)^{\frac{1}{2}}} \text{ et } \frac{dp}{dr} = \frac{2a^2(4a^4 - r^4)}{(4a^4 + r^4)^{\frac{3}{2}}}.$$

En posant $\frac{dp}{dr} = o$ et joignant à cette équation celle de la courbe, on trouve qu'au point $r = 2^{\frac{1}{2}}a$ et $t = \frac{1}{2}$, il y a inflexion.

10. $r^2 = a^2 \cos 2t.$ (Lemniscate de Bernoulli.)

On a $\frac{dr}{dt} = -\frac{\sqrt{a^4 - r^4}}{r}$ et, par suite, $p = \frac{r^3}{a^2}$ et $\frac{dp}{dr} = \frac{3r^2}{a^2}.$

D'où l'on trouve que l'origine est point d'inflexion des deux branches de la courbe.

11. $y = a - b\cos t,$
$x = at - b\sin t.$ (Équations de la trochoïde.)

On a $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b(a\cos t - b)}{(a - b\cos t)^3}.$$

D'où, en égalant à o cette dérivée seconde,

$$\cos t = \frac{b}{a} \text{ et, par suite, } y = \frac{a^2 - b^2}{a}$$

pour les coordonnées du point d'inflexion.

II. — *Points multiples.*

Soient $$F(x,y) = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
l'équation algébrique et rationnelle d'une courbe et
$$\frac{dF}{dx} = o, \quad \frac{dF}{dy} = o. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$
ses dérivées premières par rapport à x et à y.

Les coordonnées des points multiples sont les valeurs de x et y satisfaisant à la fois aux équations (1) et (2).

Les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ par chaque *point double,* si toutefois on n'a pas $\frac{d^2F}{dx^2} = o$, $\frac{d^2F}{dxdy} = o$, $\frac{d^2F}{dy^2} = o$, sont fournies par la dérivée deuxième de l'équation de la courbe, dérivée qui, à cause des équations (2), se réduit à
$$\frac{d^2F}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{d^2F}{dydx}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2F}{dx^2} = o.$$

Pour un *point triple,* si toutefois on n'a pas $\frac{d^3F}{dy^3} = o$, $\frac{d^3F}{dy^2dx} = o$, $\frac{d^3F}{dxdy^2} = o$, $\frac{d^3F}{dx^3} = o$, les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ sont fournies par la dérivée troisième de (1) dans laquelle on aura posé $\frac{d^2F}{dx^2} = o$, $\frac{d^2F}{dxdy} = o$, $\frac{d^2F}{dy^2} = o$.

Et ainsi de suite.

Quand l'équation de la courbe est explicite et renferme des radicaux à double signe, on détermine les points multiples en cherchant les valeurs de x qui font disparaître un des radicaux sans le faire disparaître de $\frac{dy}{dx}$. L'équation de la courbe fournit ensuite les valeurs correspondantes de y. On peut aussi rendre rationnelle l'équation de la courbe et suivre la règle indiquée plus haut.

La multiplicité présente différents cas :

1° Si les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ sont réelles et différentes, le

point multiple trouvé est un *point multiple proprement dit.*

2° Si les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ sont réelles et égales, et qu'en faisant varier x ou y des deux côtés du point considéré, les ordonnées ou les abcisses de la courbe soient réelles d'un côté, imaginaires de l'autre, le point multiple est un *point de rebroussement.* Le rebroussement est de premier genre quand, au point que l'on considère, le $\frac{d^2y}{dx^2}$ a des signes différents pour deux branches de courbe; du second genre s'il a le même signe.

3° Si les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ sont imaginaires, le point multiple est dit *isolé* ou *conjugué.*

Exemple I.

Soit la courbe représentée par l'équation

$$F = y^4 + x^4 - 2ay^3 + 2bx^2y = o.$$

La dérivée première de l'équation est

$$(2y^3 - 3ay^2 + bx^2)\frac{dy}{dx} + 2x^3 + 2bxy = o.$$

En égalant à o les dérivées premières de F par rapport à x et y, on a donc

$$x(x^2 + by) = o,$$
$$2y^3 - 3ay^2 + bx^2 = o.$$

Ces équations étant satisfaites, ainsi que celle de la courbe, par les valeurs réelles $x = o$, $y = o$, ce point est multiple.

Mais on a

$$\frac{d^2F}{dx^2} = 4(3x^2 + by),$$
$$\frac{d^2F}{dxdy} = 4bx,$$
$$\frac{d^2F}{dy^2} = 12y(y - a),$$

dérivées nulles pour $x = o$ et $y = o$, sans que, pour ces mêmes valeurs, les dérivées troisièmes de F le soient.

Pour déterminer les coefficients angulaires des tangentes aux différentes branches de courbe, il faudra donc recourir à la dérivée troisième de l'équation de la courbe, dérivée dans laquelle il faudra faire les dérivées deuxièmes de F nulles et poser $x = o$, $y = o$. Cette dérivée troisième sera, après ces substitutions,

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - b\frac{dy}{dx} = o;$$

équation satisfaite pour les valeurs réelles et inégales

$$\frac{dy}{dx} = o, \quad \frac{dy}{dx} = +\sqrt{\frac{b}{a}}, \quad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

L'origine est donc un point triple et les tangentes aux trois branches de courbe qui s'y rencontrent sont l'une l'axe des x, les deux autres deux droites également inclinées sur cet axe.

(Cramer.)

Exemple II.

Soit la courbe dont l'équation est

$$(a^2y - bx^2)^2 = a^4(x - a)^{\frac{5}{2}}.$$

On pourrait, pour déterminer le point multiple, suivre le procédé ordinaire; mais il est plus simple de résoudre l'équation par rapport à y, ce qui donne

$$y = \frac{b}{a^2}x^2 \pm (x - a)^{\frac{5}{4}}.$$

Sous cette forme, l'équation fait voir 1° que, pour toute valeur de $x > a$, y a deux valeurs réelles; 2° que, pour $x = a$, valeur correspondante à $y = b$, les deux valeurs se réduisent à une seule; 3° que, pour $x < a$, les valeurs de y sont imaginaires.

On en conclut que le point $x = a$, $y = b$ est un point

double qui sera de rebroussement si, en ce point, les deux branches de courbe ont une tangente commune. Or, on a

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2b}{a^2}x\pm\frac{5}{2}(x-a)^{\frac{3}{2}}$$

et l'on voit que, pour $x=a$, $y=b$, les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ sont toutes deux $\frac{dy}{dx}=\frac{2b}{a}$.

Donc le point double est de rebroussement. On a encore

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2b}{a^2}\pm\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}(x-a)^{\frac{1}{2}}$$

et, pour toute valeur de x un peu plus grande que a, les deux valeurs de $\frac{d^2y}{dx^2}$ sont positives. Donc le rebroussement est du second genre.

Exemple III.

Soit encore la courbe dont l'équation est

$$F=ay^2-x^3+bx^2=o.$$

La dérivée première de cette équation est

$$2ay\frac{dy}{dx}-3x^2+2bx=o.$$

En égalant à o les dérivées premières de F, on a donc

$$y=o,$$
$$x(3x-2b)=o.$$

Ces équations, ainsi que celle de la courbe, étant satisfaites, pour les valeurs réelles $x=o$, $y=o$, ce point est multiple, et, comme les dérivées secondes de F ne sont point nulles pour les valeurs trouvées, la dérivée seconde de l'équation de la courbe fournira les valeurs de $\frac{dy}{dx}$. Cette dérivée est

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-3x+b=o;$$

d'où
$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{3x-b}{a}}$$

et, pour $x = o$, des valeurs de $\frac{dy}{dx}$ imaginaires. Donc l'origine est un point isolé ou conjugué. (Cramer.)

Exercices.

1. $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(y^2 - x^2) = o.$ (Lemniscate.)

L'origine est un point double et les tangentes en ce point sont bissectrices des axes.

2. $y^2 = ax^3.$ (Développée de la parabole.)

Point de rebroussement du premier genre à l'origine. La tangente commune est l'axe des abcisses.

3. $y^2 = ax^2 + bx^3.$ (a et b positifs.)

Point double à l'origine. Coefficients angulaires des tangentes en ce point : $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{a}$. Donc, tangentes également inclinées sur l'axe des abcisses.

4. $y^2(a - x) - x^3 = o.$ (Cissoïde.)

Point de rebroussement du premier genre à l'origine. La tangente commune est l'axe des abcisses.

5. $x^3 - 3axy + y^3 = o.$ (Folium de Descartes.)

Point double à l'origine. Axes tangents aux deux branches de courbe.

6. $(y - x^2)^3 = x(x - a)^3.$

Point de rebroussement du premier genre : $x = a, y = a^2$. Le coefficient angulaire de la tangente commune est

$$\frac{dy}{dx} = 2a.$$

7. $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$.

Point isolé à l'origine.

8. $x^6 - 3a^4x^2 + 2y^3 + 3ay^2 + a^3 = o$.

Point double : $x = o$, $y = a$.

En ce point, $\frac{dy}{dx} = \pm a^{\frac{3}{2}}$.

9. $a^6y^2 - 2a^4x^3y + a^2x^6 - x^7 - o$.

L'origine est un point de rebroussement du premier genre; l'axe des abcisses, la tangente commune.

10. $y = \pm (x - a)\sqrt{x - b}$. $(a < b.)$

Point isolé : $x = a$, $y = o$.

11. $y = \pm (x^2 - a^2)\sqrt{x - \frac{2a^3}{x}}$.

Point double : $x = a$, $y = -2a$.

$$\frac{dy}{dx} = 2a\left(1 \pm \sqrt{a}\right).$$

12. $x^4 - ax^2y + axy^2 + \frac{1}{4}a^2y^2 = o$.

Rebroussement du second genre à l'origine. L'axe des abcisses est la tangente commune.

13. $y^2 = x(x + 1)^2$.

L'origine est un point isolé.

14. $x^4 - 2\sqrt{2ax^3} + 2a^2x^2 - ay^3 - a^2y^2 = o$.

L'origine est un point double; $\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{2}$.

15. $y^2 = bx^3 - ax^2$.

Point isolé à l'origine.

16. La cycloïde a une infinité de points de rebroussement du premier genre dont les coordonnées sont

$$y = o, \quad x = 2na\pi;$$

n étant un nombre entier, positif ou négatif.

17. $a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$. (Développée de l'ellipse.)

Quatre points de rebroussement du premier genre :

$$x = o, \quad y = + \frac{c^2}{b}; \quad \frac{dy}{dx} = + \infty.$$

$$x = o, \quad y = - \frac{c^2}{b}; \quad \frac{dy}{dx} = - \infty.$$

$$x = + \frac{c^2}{a}, \quad y = o; \quad \frac{dy}{dx} = o.$$

$$x = - \frac{c^2}{a}, \quad y = o; \quad \frac{dy}{dx} = o.$$

18. $xy^2 + x^2y + x^2 - y^2 + 3x + 3y = o$.

Deux points doubles :

$$x = 3, \quad y = -3; \quad \frac{dy}{dx} = \pm 1.$$

$$x = -1, \quad y = 1; \quad \frac{dy}{dx} = \pm 1.$$

19. $x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = o$.

Trois points doubles :

$$x = o, \quad y = -a; \quad \frac{dy}{dx} = \pm \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$x = a, \quad y = o; \quad \frac{dy}{dx} = \pm \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$x = -a, \quad y = o; \quad \frac{dy}{dx} = \pm \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(Cramer.)

20. $(x^2 - y^2)\,ay - x^4 = o.$

Point triple à l'origine;

$$\frac{dy}{dx} = +1,\quad \frac{dy}{dx} = -1,\quad \frac{dy}{dx} = o.$$

21. $y^4 + x^4 - 2a^2x^2 - 2a^2y^2 + a^4 = o.$

Quatre points doubles :

$$x = o,\qquad y = a;\quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

$$x = o,\qquad y = -a;\quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

$$x = a,\qquad y = o;\quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2}.$$

$$x = -a,\quad y = o;\quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2}.$$

22. $y^4 - axy^2 + x^4 = o.$

Point triple à l'origine. — Deux branches de courbe, ayant pour tangente commune l'axe des x, forment un point de rebroussement du premier genre. L'axe des y est tangent à la troisième branche.

23. $(x^2 + y^2)^3 - 4a^2x^2y^2 = o.$ (Rosace à quatre branches.)

L'origine est un point quadruple. — La courbe se compose de quatre folioles à chacune desquelles les axes des x et des y sont tangents.

24. $y^4 + x^4 + 2bx^2y = o.$

L'origine est un point triple. — Deux des branches de la courbe, ayant l'axe des y pour tangente commune, forment un point de rebroussement du premier genre; la troisième branche a pour tangente l'axe des x.

25. $x^5 - ay^4 + 2bx^3y + b^2xy^2 = o.$

Point triple à l'origine. — Deux des branches de la courbe, ayant l'axe des x pour tangente commune, forment un

point de rebroussement du second genre; la troisième branche a pour tangente l'axe des y.

26. $x^6 + 2a^2x^3y - b^3y^3 = o$.

Point triple à l'origine. — Deux branches de la courbe, ayant l'axe des x pour tangente commune, forment un point de rebroussement du second genre; la troisième branche s'infléchit au point triple et sa tangente est aussi l'axe des x.

27. $x^5 = ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$

En posant $y = ux$, l'équation devient

$$x = a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Cette dernière équation représente une courbe du quatrième ordre coupant l'axe des ordonnées en autant de points que l'équation

$$a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 = o. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

a de racines réelles. La courbe (2) construite, il est facile de construire (1). Si les quatre racines de (3) sont réelles et inégales, l'origine est un point quadruple. — Chercher quelle est la nature de ce point si les racines sont égales, imaginaires, deux réelles et deux imaginaires, etc.

(Cramer.)

28. $x^6 = ax^5 + bx^4y + cx^3y^2 + dx^2y^3 + exy^4 + fy^5$.

Point quintuple à l'origine. — Solution semblable à celle du numéro précédent.

III. — *Points d'arrêt et points saillants.*

Soit $y = F(x)$ l'équation explicite d'une courbe.

On détermine les coordonnées d'un point d'arrêt en cherchant, parmi une suite de valeurs de x donnant des valeurs de y réelles, quelle est celle à partir de laquelle y devient brusquement imaginaire; l'équation de la courbe fournit la valeur correspondante de y.

Pour déterminer l'abcisse d'un point saillant, on cherche, parmi une suite de valeurs de x, celle pour laquelle $F'(x)$ change brusquement de valeur. L'équation de la courbe fournit ensuite l'ordonnée du point.

Exemple I.

Soit la courbe dont l'équation est

$$y = \frac{1}{\log x}.$$

Pour des valeurs positives de x de plus en plus petites, les valeurs de y sont réelles; mais à partir de $x = o$, y devient brusquement imaginaire. D'ailleurs, quand $x = o$, $y = o$. L'origine est donc un point d'arrêt.

Exemple II.

Soit la courbe représentée par l'équation

$$y = x \text{ arc tang } \frac{1}{x}.$$

On a $$F'(x) = \text{arc tang } \frac{1}{x} + \frac{x}{1 + x^2}.$$

La limite des valeurs positives et décroissantes de x est

$$F'(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Celle des valeurs négatives et croissantes de x est

$$F'(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

D'ailleurs, quand $x = o$, $y = o$. Donc l'origine est un point saillant.

Exercices.

1. $y = e^{\frac{1}{x}}$.

Point d'arrêt à l'origine.

2. $y = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.

Point saillant à l'origine.

3. $y = \dfrac{1}{1 + e^{-\frac{1}{x}}}$.

Point d'arrêt : $x = o$, $y = 1$.

4. $y = x \log x$.

L'origine est un point d'arrêt.

5. $y + 1 = a^{-\frac{1}{x}}$, $(a > 1)$.

$x = o$, $y = -1$ sont les coordonnées d'un point d'arrêt.

6. $\left(y - x \text{ arc tang } \dfrac{1}{x}\right)^2 - x^2 \cos^2 x = o$.

Point saillant à l'origine.

CHAPITRE XIV.

COURBURE DES COURBES PLANES.

SECTION I. — *Rayons de courbure.*

L'expression du rayon ρ de courbure des courbes planes est

1° en coordonnées rectilignes,

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

x et y étant les coordonnées courantes et x la variable indépendante;

2° en coordonnées polaires,

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

r désignant le rayon vecteur, t l'angle polaire pris comme variable indépendante.

Si p représente la perpendiculaire menée du pôle sur la tangente, on a

$$\rho = r\frac{dr}{dp} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Exemple I.

De l'équation de la chainette

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

on tire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) \text{ et } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{a^2}.$$

Substituant dans l'expression (1) ces valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$, on obtient

$$\rho = \frac{\left[1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{y}{a^2}} = \frac{y^2}{a}.$$

Exemple II.

Dans la spirale hyperbolique dont l'équation est

$$r = \frac{a}{t},$$

on a
$$\frac{dr}{dt} = -\frac{a}{t^2} = -\frac{r^2}{a},$$
$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{2a}{t^3} = \frac{2r^3}{a^2}.$$

La substitution des valeurs de ces dérivées dans l'expression (2) fournit

$$\rho = \frac{\left(r^2 + \frac{r^4}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2} = \frac{r\,(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3}.$$

Exemple III.

La spirale logarithmique a pour équation
$$p = mr.$$
D'où
$$\frac{dr}{dp} = \frac{1}{m}.$$
En vertu de l'expression (3), on a donc
$$\rho = \frac{r}{m}.$$

Exercices.

1. $xy = k^2$ (Hyperbole rapportée à ses asymptotes.)
$$\rho = \frac{x^3}{2k^2}\left(1 + \frac{k^4}{x^4}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

2. $y^n = ax^{n+1}$.
$$\rho = \frac{x^{\frac{n-1}{n}}\left[n^2 + (n+1)^2(a^2x^2)^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{3}{2}}}{n\,(n+1)\,a^{\frac{1}{n}}}.$$

Si $n = 2$, $\rho = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}(4 + 9ax)^{\frac{3}{2}}}{6a^{\frac{1}{2}}}$;

rayon de courbure de la développée de la parabole.

3. $y = \frac{a}{x}\sqrt{ax - x^2}.$

$$\rho = \frac{(a^4 + 4ax^3 - 4x^4)^{\frac{3}{2}}}{2a^2x^2(3a - 4x)}.$$

4. $x = a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}.$ (Tractrice.)

$$\rho = \frac{a}{y}\sqrt{a^2 - y^2}.$$

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{b^2 - (a - y)^2}}{y}.$ (Équation différentielle de la trochoïde.)

$$\rho = \frac{\left[b^2 - a(a - 2y)\right]^{\frac{3}{2}}}{a(a - y) - b^2}.$$

Si $a = b$, $\rho = 2\sqrt{2ay}$; rayon de courbure de la cycloïde.

6. $mx^{\frac{2}{3}} + ny^{\frac{2}{3}} = q.$

$$\rho = \frac{3(xy)^{\frac{1}{3}}}{mn^3q}\left(n^2x^{\frac{2}{3}} + m^2y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Pour trouver le rayon de courbure de l'hypocycloïde dont l'équation est

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

il suffit de faire dans (1)

$$m = 1,\ n = 1,\ q = a^{\frac{2}{3}}.$$

On trouve $\rho = 3(axy)^{\frac{1}{3}}.$

L'équation de la développée de l'ellipse est

$$a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

En faisant $m = a^{\frac{2}{3}}$, $n = b^{\frac{2}{3}}$, $q = c^{\frac{4}{3}}$, dans l'expression (1), on trouve pour le rayon de courbure de cette développée :

$$\rho = \frac{3(xy)^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}b^2c^{\frac{4}{3}}}\left(b^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

La développée de l'hyperbole a pour équation

$$a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} = (a^2 + b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

En faisant $m = a^{\frac{2}{3}}$ $n = -b^{\frac{2}{3}}$ et $q = (a^2 + b^2)^{\frac{2}{3}}$, on trouve pour le rayon de courbure de cette développée

$$\rho = -\frac{3\,(xy)^{\frac{1}{3}}}{b^2\,(a^3 + ab^2)^{\frac{2}{3}}} \left(b^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{4}{3}} y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

7. $r = a \sin 2t$. (Rosace à quatre branches.)

$$\rho = \frac{(4a^2 - 3r^2)^{\frac{3}{2}}}{8a^2 - 3r^2}.$$

8. $r = a + b \cos t$. (Limaçon de Pascal.)

$$\rho = \frac{a^2 - 2ar - b^2}{2a^2 - 3ar - 2b^2}.$$

9. $r = a\left[1 + \sqrt{2\,(1 - \cos t)}\right]$. (Limaçon bi-foliacé.) (*).

$$\rho = \frac{1}{2}\,\frac{(3r^2 + 2ar + 3a^2)^{\frac{3}{2}}}{3r^2 + 3ar + 6a^2}.$$

10. $r = \dfrac{p}{1 + e \cos t}$. (Équation des courbes du deuxième degré, p représentant le paramètre et e l'excentricité.)

$$\rho = p\left(1 + \frac{e^2 r^2 \sin^2 t}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Si l'on désigne par α l'angle du rayon vecteur et de la tangente, on a

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{er \sin t}{p}.$$

D'où, l'expression très-simple du rayon de courbure :

$$\rho = \frac{p}{\cos^3 \alpha}.$$

(*) Je ne crois pas que cette courbe soit connue. Sa construction et sa forme ont beaucoup d'analogie avec la construction et la forme du *limaçon de Pascal*. Elle présente deux folioles. Je proposerai de l'appeler le *limaçon bi-foliacé*. E. B.

11. $p = \frac{br}{(a^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}$. (Équation des spirales de Côtes, p désignant la perpendiculaire menée du pôle sur la tangente.)

$$\rho = \frac{r\,(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2 b}.$$

12. $p^2 = \frac{c^2\,(r^2 - a^2)}{c^2 - a^2}$. (Épicycloïde.)

$$\rho = p.\frac{c^2 - a^2}{c^2}.$$

Section II. — *Développées.*

Soient x et y les coordonnées courantes d'une courbe rapportée à des axes rectangulaires, α et β les coordonnées du centre de courbure, on a

$$x - \alpha = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\,\frac{dy}{dx},$$

$$y - \beta = -\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

et, pour obtenir l'équation de la développée de la courbe, il suffit d'éliminer x et y entre les équations précédentes et celle de la courbe. Quand l'élimination est laborieuse ou impossible, on se contente de chercher l'équation différentielle de la développée en remplaçant x et y par leurs valeurs en fonction de α et de β dans l'expression

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}. \quad (*)$$

(*) Voir un autre moyen de trouver les développées, exercice 14 des lignes enveloppes.

Si p et r sont les coordonnées courantes d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires, p' et r' celles de la développée, ρ le rayon de courbure, on a

$$\rho = r\frac{dr}{dp},$$
$$p'^2 = r^2 - p^2,$$
$$r'^2 = r^2 + \rho^2 - 2\rho p,$$

et, pour obtenir l'équation de la développée, il suffit d'éliminer r, p et ρ entre les trois équations précédentes et celle de la courbe.

Exemple 1.

Soit à chercher la développée de la parabole $y^2 = 2px$. Cette équation fournit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} \text{ et } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^3}.$$

On a donc

$$x - \alpha = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{p^2}{y^2}}{-\frac{p^2}{y^3}}\frac{p}{y} = -2x - p,$$

d'où

$$x = \frac{\alpha - p}{3};$$

et

$$y - \beta = -\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{1 + \frac{p^2}{y^2}}{\frac{p^2}{y^3}} = \frac{y^3}{p^2} + y,$$

d'où

$$y = (-p^2\beta)^{\frac{1}{3}}.$$

Substituant ces valeurs de x et y dans l'équation de la courbe, on trouve

$$\beta^2 = \frac{1}{p}\left[\frac{2(\alpha - p)}{3}\right]^3$$

pour l'équation de la développée.

Exemple II.

L'équation différentielle de la chainette est

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{y^2-a^2}}{a}\text{; d'où } \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y}{a^2}.$$

On a donc

$$y-\beta=-\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}=-\frac{1+\frac{y^2-a^2}{a^2}}{\frac{y}{a^2}}=-y;$$

d'où

$$y=\frac{\beta}{2}.$$

La relation

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

fournit, en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur,

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=-\frac{a}{\sqrt{y^2-a^2}}$$

et, en substituant à y sa valeur,

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=-\frac{2a}{\sqrt{\beta^2-4a^2}};$$

équation différentielle de la développée de la chainette.

Exemple III.

Soit à chercher la développée de la spirale $r=a^{k-t}$.
L'équation de cette courbe peut se mettre sous la forme

$$p=\frac{r}{\sqrt{1+\log a}}.$$

D'où
$$\rho = r\frac{dr}{dp} = r\sqrt{1+\log a},$$

$$r'^2 = r^2 - p^2 = r^2 - \frac{r^2}{1+\log a} = \frac{r^2\log a}{1+\log a},$$

$$p'^2 = r^2 + \rho^2 - 2\rho p = r^2 + r^2(1+\log a)$$
$$- 2r\sqrt{1+\log a}\cdot\frac{r}{\sqrt{1+\log a}} = r^2\log a.$$

Par suite, $\dfrac{r'^2}{p'^2} = \dfrac{r^2\log a}{1+\log a} : r^2\log a = \dfrac{1}{1+\log a}$

et $r' = \dfrac{p'}{\sqrt{1+\log a}}$. (Équation de la développée. — Spirale semblable à la proposée.)

Exercices.

1. $xy = 1$. (Hyperbole dont la puissance est l'unité.)

L'équation de la développée est

$$(\alpha+\beta)^{\frac{2}{3}} - (\alpha-\beta)^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{1}{3}}.$$

2. $3y^2 = x^3$. (Parabole semi-cubique.)

$$81\beta^2 = 16\left(2\pm\sqrt{1-6\alpha}\right)^2\left(\pm\sqrt{1-6\alpha}-1\right)$$

est l'équation de la développée.

3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. (Ellipse.)

Développée $(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}} = (a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$.

En changeant b en $b\sqrt{-1}$, on trouve que la développée de l'hyperbole est

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}} - (b\beta)^{\frac{2}{3}} = (a^2+b^2)^{\frac{2}{3}}$$

et, en faisant $b = a$ dans cette dernière équation, on obtient pour développée de l'hyperbole équilatère

$$\alpha^{\frac{2}{3}} - \beta^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}}.$$

4. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (Hypocycloïde.)

Développée : $(\alpha + \beta)^{\frac{2}{3}} + (\alpha - \beta)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$.

5. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a - y}{y}}$ étant l'équation différentielle de la cycloïde, chercher celle de la développée de cette courbe. On trouvera

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\beta}{\sqrt{-2a\beta - \beta^2}}.$$

6. Chercher l'équation différentielle de la développée de la tractrice, celle de cette courbe étant

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

On trouve pour l'équation cherchée

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\sqrt{\beta^2 - a^2}}{a}.$$

7. $y = ae^{\frac{x}{a}}$. (Logarithmique.)

L'équation différentielle de la développée est

$$4a\frac{d\alpha}{d\beta} + \beta \pm (\beta^2 - 8a^2)^{\frac{1}{2}} = o.$$

8. $p^2 = r^2 - a^2$.

La développée est un cercle.

9. $p^2 = \frac{c^2(r^2 - a^2)}{c^2 - a^2}$. (Épicycloïde.)

La développée est

$$p'^2 = \frac{c^2\left(r'^2 - \frac{a^4}{c^2}\right)}{c^2 - a^2}, \text{ autre épicycloïde.}$$

CHAPITRE XV.

SURFACES.

Soient $z = f(x, y)$ l'équation de la surface; x', y', z' les coordonnées courantes; x, y, z celles du point de contact du plan tangent. Les éléments principaux de la surface se déterminent au moyen des expressions suivantes dans lesquelles

$$p = \frac{dz}{dx} \text{ et } q = \frac{dz}{dy}:$$

Plan tangent.

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y) \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Normale.

$$\frac{x' - x}{-p} = \frac{y' - y}{-q} = \frac{z' - z}{1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Cosinus directeurs de la normale. — En représentant par α, β, γ les angles de la normale avec les axes ou les angles d'inclinaison du plan tangent sur les plans coordonnés et posant $k = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$, on a

$$\frac{\cos\alpha}{-p} = \frac{\cos\beta}{-q} = \frac{\cos\gamma}{1} = \frac{1}{\pm k} \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Distance de l'origine au plan tangent. — D représentant cette distance, on a

$$D = \frac{px + qy - z}{\mp k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Rayons de courbure principaux. — En désignant par ρ le rayon de courbure et posant

$$r = \frac{d^2z}{dx^2}, \; s = \frac{d^2z}{dxdy}, \; t = \frac{d^2z}{dy^2},$$

les rayons de courbure principaux sont les racines de l'équation

$$(rt - s^2)\rho^2 - k\left[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t\right]\rho + k^4 = o \; . \quad (5).$$

Lignes de courbure. — L'équation différentielle de la projection des lignes de courbure sur le plan des xy est

$$[(1+q^2)s - pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + [(1+q^2)r - (1+p^2)t]\frac{dy}{dx}$$
$$- (1+p^2)s + pqr = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Ombilics. — Ils sont fournis par les équations

$$\frac{1+p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1+q^2}{t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

combinées avec celle de la surface.

Si l'équation de la surface est de la forme

$$F(x, y, z) = o,$$

les éléments principaux se déterminent plus facilement au moyen des expressions suivantes :

Plan tangent.

$$(x'-x)\frac{dF}{dx} + (y'-y)\frac{dF}{dy} + (z'-z)\frac{dF}{dz} = o \quad . \quad (8).$$

Normale.

$$\frac{x'-x}{\dfrac{dF}{dx}} = \frac{y'-y}{\dfrac{dF}{dy}} = \frac{z'-z}{\dfrac{dF}{dz}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Cosinus directeurs de la normale.

$$\frac{\cos\alpha}{\dfrac{dF}{dx}} = \frac{\cos\beta}{\dfrac{dF}{dy}} = \frac{\cos\gamma}{\dfrac{dF}{dz}} = \frac{1}{\pm R} \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

en désignant par R l'expression

$$\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}.$$

Distance de l'origine au plan tangent.

$$D = \frac{x\dfrac{dF}{dx} + y\dfrac{dF}{dy} + z\dfrac{dF}{dz}}{R} \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Rayons de courbure principaux. — Ils sont déterminés par l'équation

$$U^2\left(v-\frac{R}{\rho}\right)\left(w-\frac{R}{\rho}\right)+V^2\left(w-\frac{R}{\rho}\right)\left(u-\frac{R}{\rho}\right)+W^2\left(u-\frac{R}{\rho}\right)\left(v-\frac{R}{\rho}\right)$$
$$-2u'VW\left(u-\frac{R}{\rho}\right)-2v'UW\left(v-\frac{R}{\rho}\right)-2w'UV\left(w-\frac{R}{\rho}\right)$$
$$-U^2u'^2-V^2v'^2-W^2w'^2+2VWv'w'+2UWu'w'+2UVu'v'=o \quad (12)$$

dans laquelle

$$\frac{dF}{dx}=U,\ \frac{dF}{dy}=V,\ \frac{dF}{dz}=W,\ \frac{d^2F}{dx^2}=u,\ \frac{d^2F}{dy^2}=v,\ \frac{d^2F}{dz^2}=w$$
$$\frac{d^2F}{dydz}=u',\quad \frac{d^2F}{dxdz}=v',\quad \frac{d^2F}{dxdy}=w'.$$

Points singuliers. — Les coordonnées de ces points doivent satisfaire aux équations simultanées

$$\frac{dF}{dx}=o,\quad \frac{dF}{dy}=o,\quad \frac{dF}{dz}=o.\ .\ .\ .\ .\ \quad (13)$$

et à celle de la surface.

En désignant par $(u), (v), (w), (u'), (v'), (w')$ ce que deviennent u, v, w, u', v', w' pour les coordonnées du point singulier, l'équation du lieu de toutes les lignes tangentes en ce point est

$$(u)x^2+(v)y^2+(w)z^2+2(u')yz+2(v')xz+2(w')xy=o \quad (14).$$

Remarque. — Si l'équation de la surface consiste dans une fonction homogène du $n^{\text{ème}}$ degré en x, y, z, égale à une constante c, l'équation du plan tangent est

$$x'\frac{dF}{dx}+y'\frac{dF}{dy}+z'\frac{dF}{dz}=nc.\ .\ .\ .\ \quad (15)$$

et la distance de l'origine au plan tangent,

$$D=\frac{nc}{R}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \quad (16).$$

Exemple.

Soit $F = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = o$. (Équation de l'ellipsoïde.)

On a $\frac{dF}{dx} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{dF}{dy} = \frac{2y}{b^2}, \quad \frac{dF}{dz} = \frac{2z}{c^2};$

et, en remplaçant ces dérivées par leurs valeurs, on tire successivement :

1° De l'équation (15),

$$x' . \frac{2x}{a^2} + y' \frac{2y}{b^2} + z' \frac{2z}{c^2} = 2$$

ou

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1,$$

pour l'équation du plan tangent.

2° Des équations (9),

$$\frac{x' - x}{\frac{2x}{a^2}} = \frac{y' - y}{\frac{2y}{b^2}} = \frac{z' - z}{\frac{2z}{c^2}}$$

ou

$$\frac{a^2(x' - x)}{x} = \frac{b^2(y' - y)}{y} = \frac{c^2(z' - z)}{z},$$

pour les équations de la normale.

3° Des équations (10),

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{2x}{a^2}} = \frac{\cos\beta}{\frac{2y}{b^2}} = \frac{\cos\gamma}{\frac{2z}{c^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4} + \frac{4z^2}{c^4}}}$$

ou

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{x}{a^2}} = \frac{\cos\beta}{\frac{y}{b^2}} = \frac{\cos\gamma}{\frac{z}{c^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}},$$

pour déterminer les cosinus directeurs de la normale ou les angles du plan tangent avec les plans coordonnés.

4° De l'équation (16),

$$D = \frac{2}{\sqrt{\frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4} + \frac{4z^2}{c^4}}}$$

ou

$$D = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}},$$

pour la distance de l'origine au plan tangent.

5° De l'équation (12),

$$\frac{4x^2}{a^4}\left(\frac{2}{b^2} - \frac{2}{D\rho}\right)\left(\frac{2}{a^2} - \frac{2}{D\rho}\right) + \frac{4y^2}{b^4}\left(\frac{2}{c^2} - \frac{2}{D\rho}\right)\left(\frac{2}{a^2} - \frac{2}{D\rho}\right)$$
$$+ \frac{4z^2}{c^4}\left(\frac{2}{b^2} - \frac{2}{D\rho}\right)\left(\frac{2}{a^2} - \frac{2}{D\rho}\right) = o,$$

à cause de $U = \frac{2x}{a^2}$, $V = \frac{2y}{b^2}$, $W = \frac{2z}{c^2}$, $D = \frac{2}{R}$;

d'où $u = \frac{2}{a^2}$, $v = \frac{2}{b^2}$, $w = \frac{2}{c^2}$, $R = \frac{2}{D}$;

$$u' = o, \quad v' = o, \quad w' = o.$$

Cette équation qui fournit les rayons de courbure principaux devient, en divisant par

$$\frac{16}{a^2b^2c^2D^2\rho^2}(D\rho - a^2)(D\rho - b^2)(D\rho - c^2),$$

$$\frac{x^2}{a^2(D\rho - a^2)} + \frac{y^2}{b^2(D\rho - b^2)} + \frac{z^2}{c^2(D\rho - c^2)} = o;$$

ou encore

$$\rho^2 - \left[(a^2 + b^2 + c^2) - (x^2 + y^2 + z^2)\right]\frac{\rho}{D} + \frac{a^2b^2c^2}{D^4} = o.$$

Sous cette forme, on voit, par le dernier terme, que si D conserve la même valeur, le produit des rayons principaux est constant.

6° De l'équation (6), en tirant d'abord de l'équation de la surface

$$p = -\frac{c^2 x}{a^2 z},\ q = -\frac{c^2 y}{b^2 z},\ r = -\frac{c^4 (b^2 - y^2)}{a^2 b^2 z^3},$$

$$s = -\frac{c^4 xy}{a^2 b^2 z^3},\ t = -\frac{c^4 (a^2 - x^2)}{a^2 b^2 z^3},$$

puis, en substituant dans (6) ces valeurs, ainsi que celle de z^2:

$$\frac{b^2 - c^2}{b^2} xy \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left[\frac{a^2 - c^2}{a^2} x^2 - \frac{b^2 - c^2}{b^2} y^2 - (a^2 - b^2)\right] \frac{dy}{dx}$$
$$- \frac{a^2 - c^2}{a^2} xy = o,$$

pour l'équation différentielle de la projection des lignes de courbure sur le plan des xy.

7° Des équations (7), en y substituant les valeurs de p, q, r, s, t:

$$\frac{b^2}{a^2} z \frac{a^4 z^2 + c^4 x^2}{c^4 (b^2 - y^2)} = z = \frac{a^2}{b^2} z \frac{b^4 z^2 + c^4 y^2}{c^4 (a^2 - x^2)},$$

pour les équations des ombilics.

Ces équations sont satisfaites par les valeurs

$$y = o,\ x = \pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}},\ z = \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}},$$

coordonnées des quatre ombilics.

En écrivant l'équation du plan tangent sous la forme

$$\frac{x'}{\frac{a^2}{x}} + \frac{y'}{\frac{b^2}{y}} + \frac{z'}{\frac{c^2}{z}} = 1,$$

on voit que les coordonnées des points où ce plan rencontre les axes sont

$$\frac{a^2}{x},\ \frac{b^2}{y},\ \frac{c^2}{z}.$$

Le volume de la pyramide comprise entre le plan tangent et les plans coordonnés est donc

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{x} \cdot \frac{b^2}{y} \cdot \frac{1}{3} \frac{c^2}{z} = \frac{a^2b^2c^2}{6xyz}.$$

L'aire de la portion de plan tangent limitée par les plans coordonnés est égale à ce volume divisé par le tiers de la distance de l'origine au plan tangent, soit

$$\frac{a^2b^2c^2}{6xyz} : \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} = \frac{a^2b^2c^2}{2xyz} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

Pour déterminer le lieu des projections du centre de l'ellipsoïde sur ses plans tangents, il suffit d'éliminer x, y, z entre les équations du plan tangent et de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur ce plan. Or, les équations de cette dernière ligne sont

$$\frac{a^2x'}{x} = \frac{b^2y'}{y} = \frac{c^2z'}{z};$$

d'où $$\frac{ax'}{\frac{x}{a}} = \frac{by'}{\frac{y}{b}} = \frac{cz'}{\frac{z}{c}} = \frac{\sqrt{a^2x'^2 + b^2y'^2 + c^2z'^2}}{1}$$

Multipliant respectivement les termes de l'équation du plan tangent par ces quatre quantités égales, on obtient pour le lieu cherché

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \sqrt{a^2x'^2 + b^2y'^2 + c^2z'^2},$$

équation de la surface d'élasticité.

Exercices.

1. Plan tangent au conoïde

$$x^2z^2 + a^2y^2 - r^2x^2 = 0.$$

L'équation de ce plan est

$$(z^2 - r^2)\, xx' + a^2yy' + x^2zz' = x^2z^2.$$

Quand $z = r$, $y = o$, et l'équation du plan est $z' = r$.

2. Plan tangent à la surface dont l'équation est

$$az = \left(\text{arc sin} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2.$$

On trouve pour équation de ce plan

$$2z^{\frac{1}{2}}(x'y - xy') + (z' - z)(x^2 + y^2)a^{\frac{1}{2}} = o.$$

3. Plan tangent à la surface d'élasticité

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

et distance du centre à ce plan.

En posant $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, l'équation du plan tangent est

$$(2r^2 - a^2)xx' + (2r^2 - b^2)yy' + (2r^2 - c^2)zz' = r^4.$$

La distance du centre à ce plan est

$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{\sqrt{a^4x^2 + b^4y^2 + c^4z^2}}.$$

4. Point où la normale à la surface de révolution $z = \varphi(x^2 + y^2)$ rencontre l'axe des z.

L'ordonnée de ce point est $z' = z + x\dfrac{dx}{dy}$.

5. Tous les plans tangents à la surface $z = x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ passent par un même point.

L'équation de tout plan tangent est

$$z' - z = \frac{z}{x}(x' - x) + \left(\frac{xy' - x'y}{x}\right)\varphi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

et l'on voit que pareil plan passe par l'origine.

$z = x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ est en effet l'équation des surfaces coniques dont l'origine est le sommet.

6. Ordonnée du point où le plan tangent à la surface dont l'équation est

$$x^m\left(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

rencontre l'axe des z.

L'ordonnée du point cherché est

$$z'=(m+1)\sqrt{x^2+y^2+z^2};$$

elle est donc proportionnelle à la distance du point de contact à l'origine.

7. L'équation d'une surface étant $z(x^2+y^2)=a^3$, chercher l'aire de la portion de plan tangent limitée par les plans coordonnés.

L'aire cherchée a pour expression

$$\frac{9a^6\sqrt{r^2(r^2+4z^2)}}{2xy^2z.r^2},$$

dans laquelle $r^2=x^2+y^2$.

8. Volume de la pyramide comprise entre les plans coordonnés et le plan tangent au *cono-cuneus* de Wallis.

$$a^2y^2-x^2y^2-c^2z^2=0.$$

On trouve pour expression du volume cherché :

$$\frac{x^5y^3}{6c^2z(x^2-a^2)}.$$

9. Angles du plan tangent à l'héliçoïde développable

$$x\sin\left[\frac{2\pi z}{h}-\frac{(x^2+y^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\right]+y\cos\left[\frac{2\pi z}{h}-\frac{(x^2+y^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\right]=a$$

avec les plans coordonnés.

En posant $\dfrac{2\pi z}{h}-\dfrac{(x^2+y^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{a}=0$, on trouve

$$\cos\alpha=\frac{h(a\sin\theta-x)}{\sqrt{(x^2+y^2-a^2)(h^2+4\pi^2a^2)}},$$

$$\cos\beta = \frac{h(a\cos\theta - y)}{\sqrt{(x^2+y^2-a^2)(h^2+4\pi^2a^2)}},$$

$$\cos\gamma = \frac{2a\pi}{\sqrt{h^2+4\pi^2a^2}}.$$

Le plan tangent fait donc avec le plan des xy un angle constant.

10. Plan tangent à l'héliçoïde gauche

$$x\cos nz - y\sin nz = o,$$

et distance de l'origine à ce plan. — Rayons de courbure principaux de la surface.

En représentant x^2+y^2 par r^2, on obtient :

Pour équation du plan tangent,

$$xy' - x'y + nr^2(z'-z) = o.$$

Pour la distance de l'origine à ce plan,

$$D = \frac{nrz}{\sqrt{1+n^2z^2}}.$$

Pour l'équation des rayons de courbure principaux,

$$n^2\rho^2 + (1+n^2r^2)^2 = o.$$

11. Lieu des projections de l'origine sur les plans tangents à la surface dont l'équation est

$$xyz = a^3;$$

rayons de courbure principaux, ombilic et lignes de courbure de cette surface.

Le lieu est $x^2+y^2+z^2=a^2$, sphère dont le rayon est a.

L'équation des rayons de courbure principaux,

$$\rho^2 + 2(x^2+y^2+z^2)\frac{\rho}{D} + \frac{27a^6}{D^4} = o.$$

Les coordonnées de l'ombilic, $x=y=z=a$.

L'équation différentielle de la projection des lignes de courbure sur les plans des xy,

$$x^2(x^2y^4-a^6)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2x^3y^3(y^2-x^2)\frac{dy}{dx}-y^2(x^4y^2-a^6)=o.$$

12. Éléments principaux du paraboloïde elliptique

$$\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b}-z=o.$$

Le plan tangent est

$$\frac{xx'}{a}+\frac{yy'}{b}=z+z'.$$

Les équations de la normale

$$\frac{a(x'-x)}{x}=\frac{b(y'-y)}{y}=\frac{z'-z}{-1}.$$

Les cosinus directeurs de la normale sont fournis par les équations

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{x}{a}}=\frac{\cos\beta}{\frac{y}{b}}=\frac{\cos\gamma}{-1}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1}}.$$

La distance de l'origine au plan tangent est

$$D=\frac{z}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1}}.$$

L'équation des rayons de courbure principaux,

$$\rho^2-(a+b+2z)\frac{z}{D}\rho+\frac{abz^4}{D^4}=o.$$

Les coordonnées des deux ombilics sont, en supposant $a>b$,

$$x=o,\ y=\pm\sqrt{b(a-b)},\ z=\frac{a-b}{2};$$

et, pour $a<b$,

$$y=o,\ x=\pm\sqrt{a(b-a)},\ z=\frac{b-a}{2}.$$

L'équation différentielle de la projection des lignes de courbure sur le plan des xy est

$$axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left[bx^2 - ay^2 + ab(a-b)\right]\frac{dy}{dx} - bxy = o.$$

13. Point singulier de la surface dont l'équation est

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2.$$

On trouve, en posant $x^2+y^2+z^2=r^2$,

$$U = 2x(2r^2 - a^2),\qquad V = 2y(2r^2 - b^2),\qquad W = 2z(2r^2 + c^2),$$

$$u = 2(2r^2 - a^2) + 8x^2,\quad v = 2(2r^2 - b^2) + 8y^2,\quad w = 2(2r^2 + c^2) + z^2,$$

$$u' = 8yz,\qquad v' = 8xz,\qquad w' = 8xy.$$

Les équations $U=o$, $V=o$, $W=o$ sont satisfaites pour $x=o$, $y=o$, $z=o$, et ces valeurs satisfont aussi à l'équation de la surface.

L'origine est un point singulier et l'équation du lieu de toutes les tangentes à la surface en ce point est fournie par l'équation (14) en substituant à $U, V, W, u, v, w, u', v', w'$ ce que deviennent ces dérivées pour $x=o$, $y=o$ et $z=o$. On trouve

$$a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = o,$$

équation d'un cône dont le sommet est l'origine.

14. Points singuliers de la surface des ondes dont l'équation est

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2) - a^2(b^2+c^2)x^2$$
$$- b^2(a^2+c^2)y^2 - c^2(a^2+b^2)z^2 + a^2b^2c^2 = o.$$

Quatre points singuliers dont les coordonnées sont

$$y=o,\quad x=\pm c\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},\quad z=\pm a\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

L'équation du lieu de toutes les tangentes en ces points est

$$\frac{x^2}{b^2-c^2}-\frac{a^2-c^2}{4a^2c^2}y^2+\frac{z^2}{a^2-b^2}+\frac{a^2+c^2}{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}\cdot\frac{xz}{ac}=0.$$

(Hamilton.)

15. Point singulier de la surface dont l'équation est

$$z(x^2+y^2+z^2)+ax^2+by^2=0.$$

L'origine est un point singulier et l'équation du lieu des lignes tangentes en ce point est

$$ax^2+by^2=0,$$

équation qui ne peut représenter que l'axe des z.

CHAPITRE XVI.

COURBES GAUCHES.

Les équations de la courbe étant

$$x=\varphi(z),\quad y=\psi(z),$$

ses principaux éléments se déterminent au moyen des expressions suivantes dans lesquelles x', y', z' désignent les coordonnées courantes et x, y, z celles du point de contact de la tangente :

Tangente.

$$\frac{x'-x}{\frac{dx}{dz}}=\frac{y'-y}{\frac{dy}{dz}}=\frac{z'-z}{1}\quad\ldots\quad(1).$$

Dérivée d'un arc de courbe. — En représentant l'arc par s, on a

$$\frac{ds}{dz} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Cosinus directeurs de la tangente. — En désignant par α, β, γ les angles de la tangente avec les axes,

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds} \quad . \quad . \quad (3).$$

Plan normal.

$$(x' - x)\frac{dx}{dz} + (y' - y)\frac{dy}{dz} + (z' - z) = 0 \qquad (4).$$

Plan osculateur.

$$(x' - x)\frac{d^2y}{dz^2} - (y' - y)\frac{d^2x}{dz^2} + (z' - z)\left(\frac{dy}{dz}\frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dx}{dz}\frac{d^2y}{dz^2}\right) = 0 \ (5).$$

Normale principale.

$$\frac{x' - x}{\frac{d^2x}{ds^2}} = \frac{y' - y}{\frac{d^2y}{ds^2}} = \frac{z' - z}{\frac{d^2z}{ds^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Cosinus directeurs de la normale principale. — λ, μ, ν étant les angles que cette normale fait avec les axes et R représentant l'expression

$$\pm\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2},$$

on a

$$\cos\lambda = \frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{R}, \quad \cos\mu = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{R}, \quad \cos\nu = \frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{R} \quad . \quad . \quad (7).$$

Angle de courbure. — ω représentant cet angle,

$$\omega = R ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Rayon de courbure. — ρ étant ce rayon,

$$\rho = \frac{1}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Le rayon de courbure coïncidant avec la normale principale, ses cosinus directeurs sont fournis par les équations (7).

Centre de courbure. — X, Y et Z représentant les coordonnées de ce centre, on a

$$\left.\begin{aligned} X &= x + \rho^2 \frac{d^2x}{ds^2}, \\ Y &= y + \rho^2 \frac{d^2y}{ds^2}, \\ Z &= z + \rho^2 \frac{d^2z}{ds^2}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Lieu géométrique des centres de courbure. — Les équations de ce lieu se trouvent en éliminant x, y, z entre les trois précédentes et celles de la courbe.

Axe polaire. — Les équations de cet axe sont

$$\frac{x' - X}{\dfrac{d^2y}{dz^2}} = \frac{y' - Y}{-\dfrac{d^2x}{dz^2}} = \frac{z' - Z}{\dfrac{dy}{dz}\dfrac{d^2x}{dz^2} - \dfrac{dx}{dz}\dfrac{d^2y}{dz^2}} \quad (11),$$

équations dans lesquelles il faudrait substituer à X, Y, Z les valeurs fournies par les équations (10).

Surface polaire. — L'équation de cette surface s'obtient en éliminant x, y, z entre les équations de l'axe et celles de la courbe.

Arête de rebroussement. — Les équations de cette ligne se trouvent en cherchant les courbes enveloppes (voir chapitre XVII) des projections des axes polaires. Si l'on connait la surface polaire, il n'est besoin que de chercher l'équation d'une des courbes enveloppes.

Développée. — L'équation de la surface polaire est l'une des équations de la développée. On trouve l'autre en éliminant x, y, z entre les équations de la courbe et les suivantes :

$$\frac{x-\xi}{\frac{d\xi}{d\zeta}} = \frac{y-\eta}{\frac{d\eta}{d\zeta}} = \frac{z-\zeta}{1},$$

ξ, η et ζ représentant les coordonnées du point de contact de la tangente à la développée.

Angle de torsion. — ε représentant cet angle,

$$\varepsilon = \frac{\rho^2}{\left(\frac{ds}{dz}\right)^6}\left(\frac{d^2y}{dz^2}\,\frac{d^3x}{dz^3} - \frac{d^2x}{dz^2}\,\frac{d^3y}{dz^3}\right) ds. \quad . \quad . \quad (12).$$

Exemple.

Les équations de l'hélice cylindrique sont

$$x = r \sin \frac{z}{ar} \text{ et } y = r \cos \frac{z}{ar}, \text{ d'où } x^2 + y^2 = r^2;$$

r représentant le rayon du cylindre et a la tangente trigonométrique de l'angle constant v que forme la courbe avec les génératrices.

Dérivant, on a

$$\frac{dx}{dz} = \frac{y}{ar}, \qquad \frac{dy}{dz} = -\frac{x}{ar};$$

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{x}{a^2r^2}, \quad \frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{y}{a^2r^2};$$

$$\frac{d^3x}{dz^3} = -\frac{y}{a^3r^3}, \quad \frac{d^3y}{dz^3} = \frac{x}{a^3r^3}.$$

En substituant les valeurs de ces dérivées dans les formules rappelées plus haut, on détermine facilement les éléments principaux de la courbe.

1° Tangente. — Des équations (1) on tire

$$\frac{x'-x}{\frac{y}{ar}} = \frac{y'-y}{-\frac{x}{ar}} = \frac{z'-z}{1}.$$

2° Dérivée d'un arc de courbe. — La formule (2) donne

$$\frac{ds}{dz} = \sqrt{\frac{y^2}{a^2r^2} + \frac{x^2}{a^2r^2} + 1} = \sqrt{\frac{1+a^2}{a^2}} = \frac{1}{\sin v},$$

3° Cosinus directeurs de la tangente. — On a

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\frac{dx}{dz}}{\frac{ds}{dz}} = \frac{\frac{y}{ar}}{\sqrt{\frac{1+a^2}{a^2}}} = \frac{y}{r}\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{y}{r}\cos v,$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{ds}{dz}} = -\frac{\frac{x}{ar}}{\sqrt{\frac{1+a^2}{a^2}}} = -\frac{x}{r}\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = -\frac{x}{r}\cos v,$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dz}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+a^2}{a^2}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sin v}} = \sin v.$$

Donc, d'après les expressions (3),

$$\cos\alpha = \frac{y}{r}\cos v, \quad \cos\beta = -\frac{x}{r}\cos v, \quad \cos\gamma = \sin v.$$

D'où l'on voit que la tangente fait avec l'axe des z un angle constant.

4° Plan normal. — L'équation (4) fournit

$$(x'-x)\frac{y}{ar} - (y'-y)\frac{x}{ar} + (z'-z) = o$$

ou

$$x'y - xy' + (z'-z)\,ar = o.$$

5° Plan osculateur. — En employant l'équation (5), on trouve

$$-(x'-x)\frac{y}{a^2r^2}+(y'-y)\frac{x}{a^2r^2}+(z'-z)\left(\frac{x^2}{a^3r^3}+\frac{y^2}{a^3r^3}\right)=o$$

ou

$$x'y-xy'-\frac{r}{a}(z-z')=o.$$

6° Normale principale. — A cause de $\frac{ds}{dz}=\frac{1}{\sin v}$,

$$\frac{d^2s}{dz^2}=o.$$

Et, par suite,

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{\frac{d^2x}{dz^2}}{\left(\frac{ds}{dz}\right)^2}=-\frac{\frac{x}{a^2r^2}}{\frac{1+a^2}{a^2}}=-\frac{x}{r^2(1+a^2)}=-\frac{x}{r^2}\cos^2 v,$$

$$\frac{d^2y}{ds^2}=\frac{\frac{d^2y}{dz^2}}{\left(\frac{ds}{dz}\right)^2}=-\frac{\frac{y}{a^2r^2}}{\frac{1+a^2}{a^2}}=-\frac{y}{r^2(1+a^2)}=-\frac{y}{r^2}\cos^2 v,$$

$$\frac{d^2z}{ds^2}=o.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (6), on trouve

$$-\frac{x'-x}{\frac{x}{r^2}\cos^2 v}=-\frac{y'-y}{\frac{y}{r^2}\cos^2 v}=\frac{z'-z}{o}$$

ou

$$x'y-xy'=o \text{ et } z'=z.$$

D'où l'on voit que la normale principale est parallèle à la base du cylindre et rencontre toujours son axe.

7° Cosinus directeurs de la normale principale. — On a

$$\text{R}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{x^2}{r^4}\cos^4 v+\frac{y^2}{r^4}\cos^4 v}=\frac{\cos^2 v}{r}.$$

Donc, à cause des formules (7),

$$\cos\lambda = -\frac{\frac{x}{r^2}\cos^2 v}{\frac{\cos^2 v}{r}} = -\frac{x}{r},$$

$$\cos\mu = -\frac{\frac{y}{r^2}\cos^2 v}{\frac{\cos^2 v}{r}} = -\frac{y}{r},$$

$$\cos\nu = 0.$$

La normale principale est donc toujours perpendiculaire à l'axe du cylindre, comme on l'avait déjà trouvé.

8° Angle de courbure. — La formule (8) donne

$$\omega = \frac{\cos^2 v}{r}\,ds.$$

La courbure est donc constante.

9° Rayon de courbure. — La formule (9) fournit

$$\rho = \frac{r}{\cos^2 v}.$$

10° Centre de courbure. — En employant la formule (10), on obtient

$$X = x - \frac{r^2}{\cos^4 v}\cdot\frac{x}{r^2}\cos^2 v = -x\,\text{tang}^2 v = -a^2 x,$$

$$Y = y - \frac{r^2}{\cos^4 v}\cdot\frac{y}{r^2}\cos^2 v = -y\,\text{tang}^2 v = -a^2 y,$$

$$Z = z.$$

11° Lieu géométrique des centres de courbure. — En éliminant x, y, z entre les équations du centre de courbure et celles de la courbe, on trouve très-aisément pour les équations du lieu cherché

$$X = -a^2 r \sin\frac{Z}{ar} \text{ et } Y = -a^2 r \cos\frac{Z}{ar};$$

équations d'une autre hélice cylindrique, de même axe que la première, le rayon du cylindre étant $a^2 r$.

12° Axe polaire. — Les équations (11) fournissent

$$-\frac{x'-X}{\frac{y}{a^2r^2}}=\frac{y'-Y}{\frac{x}{a^2r^2}}=\frac{z'-Z}{\frac{1}{a^3r}}.$$

L'égalité des deux premières de ces quantités, après que l'on y a remplacé X et Y par leurs valeurs, fournit pour l'une des équations de l'axe polaire

$$xx'+yy'=-a^2r^2$$

et l'on peut prendre pour autre équation de l'axe celle du plan normal

$$x'y-xy'=-(z'-z)\,ar.$$

13° Surface polaire. — Pour éliminer x, y, z entre les deux équations de l'axe et celles de la courbe, il suffit d'élever au carré les deux membres de chacune des équations précédentes et d'ajouter, ce qui donne

$$a^2(z'-z)^2=x'^2+y'^2-a^4r^2.$$

De cette expression tirant la valeur de z, la portant dans les équations de l'hélice, puis substituant les valeurs de x et de y qui en résultent dans l'équation du plan normal, on obtient pour équation de la surface polaire

$$x'\sin\left(\frac{az'\pm\sqrt{x'^2+y'^2-a^4r^2}}{a^2r}\right)$$
$$+\,y'\cos\left(\frac{az'\pm\sqrt{x'^2+y'^2-a^4r^2}}{a^2r}\right)+a^2r=o.$$

14° Arête de rebroussement. — On a trouvé pour la projection de l'axe polaire sur le plan des xy,

$$xx'+yy'=-a^2r^2.$$

Cette ligne dont l'équation peut s'écrire sous la forme

$$x'\sin\frac{z}{ar}+y'\cos\frac{z}{ar}=-a^2r$$

a pour courbe enveloppe

$$x'^2 + y'^2 = a^4r^2.$$ (Voir, chapitre suivant, le moyen de trouver cette courbe.)

C'est l'une des équations de l'arête de rebroussement. L'autre est l'équation de la surface polaire, que l'on peut écrire à cause de l'équation précédente,

$$x' \sin \frac{z'}{ar} + y' \sin \frac{z'}{ar} = -a^2r.$$

Ces deux équations de l'arête peuvent facilement s'obtenir sous la forme

$$x' = -a^2r \sin \frac{z'}{ar} \text{ et } y' = -a^2r \cos \frac{z'}{ar} \cdot$$

D'où l'on voit que les équations de l'arête se confondent avec les équations de l'hélice trouvée comme lieu géométrique des centres de courbure.

15° Angle de torsion. — La formule (12) donne

$$\varepsilon = \frac{\sin 2v}{2r} ds.$$

Remarque. — Quelle que soit la forme des équations de la courbe gauche, on tire de celles-ci les valeurs de $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, $\frac{d^2x}{dz^2}$, etc., et, par substitution de ces valeurs dans les formules générales, on détermine les éléments de la courbe.

Exercices.

1. Déterminer les éléments principaux de l'hélice cylindrique dont les équations sont

$$x = -a^2r \sin \frac{z}{ar}, \quad y = -a^2r \cos \frac{z}{ar} \cdot$$

Ce sont les équations de la ligne des centres de courbure de l'hélice prise comme exemple. Nous laissons aux élèves

de résoudre cette question et de comparer les résultats à ceux qui ont été obtenus.

2. Tangente, plan normal et plan osculateur de la courbe gauche formée par l'intersection de deux cylindres droits dont les axes se coupent rectangulairement.

Les équations de la courbe étant

$$x^2 + z^2 = a^2 \text{ et } y^2 + z^2 = b^2,$$

on trouve :

Pour les équations de la tangente,

$$xx' + zz' = a^2,$$
$$yy' + zz' = b^2.$$

Pour équation du plan normal,

$$\frac{x'}{x} + \frac{y'}{y} + \frac{z'}{z} = 1.$$

Pour équation du plan osculateur,

$$b^2x^3x' - a^2y^3y' + (a^2 - b^2)\, z^3z' = a^2b^2\,(a^2 - b^2).$$

3. Tangente et plan normal de la courbe formée par l'intersection d'une sphère et d'un ellipsoïde concentriques. (Ellipse sphérique.)

Les équations de la courbe sont

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \text{ et } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Dérivant chacune de ces équations, on obtient

$$x\,\frac{dx}{dz} + y\,\frac{dy}{dz} + z = 0,$$
$$\frac{x}{a^2}\frac{dx}{dz} + \frac{y}{b^2}\frac{dy}{dz} + \frac{z}{c^2} = 0.$$

Résolvant ces équations dérivées par rapport à $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$, on trouve

$$\frac{dx}{dz} = \frac{a^2\,(b^2 - c^2)\,z}{c^2\,(a^2 - b^2)\,x} \text{ et } \frac{dy}{dz} = \frac{b^2\,(c^2 - a^2)\,z}{c^2\,(a^2 - b^2)\,y}.$$

Par substitution de ces valeurs, on obtient pour les équations de la tangente,

$$\frac{x(x'-x)}{a^2(b^2-c^2)}=\frac{y(y'-y)}{b^2(c^2-a^2)}=\frac{z(z'-z)}{c^2(a^2-b^2)};$$

et, pour équation du plan normal,

$$a^2(b^2-c^2)\frac{x'-x}{x}+b^2(c^2-a^2)\frac{y'-y}{y}+c^2(a^2-b^2)\frac{z'-z}{z}=0.$$

4. Tangente et plan normal de la courbe formée par l'intersection de deux cônes droits dont les axes se coupent rectangulairement.

En prenant pour origine le point de rencontre des axes des cônes et les directions de ces droites comme axes des x et des y, si l'on représente par h, h' les distances des sommets des cônes à l'origine et par m, m' les coefficients angulaires des génératrices, on obtient pour équations de la courbe

$$h-x=m\sqrt{y^2+z^2},$$
$$h'-y=m'\sqrt{x^2+z^2}.$$

Les équations de la tangente sont

$$\frac{x'-x}{m^2z\left[(m'^2+1)y-h'\right]}=\frac{y'-y}{m'^2z\left[(m^2+1)x-h\right]}$$
$$=\frac{z'-z}{(h-x)(h'-y)-m^2m'^2xy};$$

celle du plan normal,

$$m^2z(x'-x)\left[(m'^2+1)y-h'\right]+m'^2z(y'-y)\left[(m^2+1)x-h\right]$$
$$+(z'-z)\left[(h-x)(h'-y)-m^2m'^2xy\right]=0.$$

5. Dans la courbe qui résulte de l'intersection des deux cylindres paraboliques

$$x^2=2az \text{ et } y^2=2bz,$$

on trouve

$$\frac{x'-x}{\frac{a}{x}}=\frac{y'-y}{\frac{b}{y}}=\frac{z'-z}{1}$$

pour équations de la tangente;

$$\frac{a}{x}x' + \frac{b}{y}y' + z' - z = a + b$$

pour équation du plan normal;

$$y' = \frac{bx}{ay}x'$$

pour équation du plan osculateur.

On trouve encore

$$\rho = \frac{(a + b + 2z)^{\frac{3}{2}}}{(a + b)^{\frac{1}{2}}}$$

et $$X = -\frac{2xz}{a + b}, \ Y = -\frac{2yz}{a + b}, \ Z = a + b + 3z.$$

6. Dans la courbe qui résulte de l'intersection des deux cylindres, l'un circulaire, l'autre parabolique :

$$x^2 + z^2 = a^2 \ \text{ et } \ y^2 = bz,$$

on obtient pour équations de la tangente

$$xx' + zz' = a^2,$$

$$y' = \frac{b}{2y}z' + \frac{y}{2}.$$

Les coordonnées des points où le plan normal rencontre les axes sont

$$x' = -\frac{bx}{2z}, \ y' = y \ \text{et} \ z' = \frac{b}{2}.$$

Le plan osculateur rencontre les axes aux points dont les coordonnées sont

$$x' = x - \frac{z^2(a^2 + z^2)}{x^3},$$

$$y' = \frac{b}{4a^2yz}z^2(a^2 + z^2) - x^4,$$

$$z' = \frac{x^4 - z^2(a^2 + z^2)}{z(2a^2 + x^2)}.$$

L'expression du rayon de courbure est

$$\rho = \frac{(4a^2y^2 + b^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{2ab\sqrt{4a^2y^2(4z^2 + y^2) + b^2x^2(4z^2 + x^2)}}.$$

7. Dans la courbe qui résulte de l'intersection de la sphère et du cylindre dont les équations sont

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \text{ et } (x - b)^2 + y^2 = a^2,$$

on obtient pour équations de la tangente

$$\frac{x' - x}{-z} = \frac{y' - y}{z\sqrt{a^2 - y^2}} = \frac{z' - z}{b}.$$

La longueur de la portion de tangente comprise entre le point de contact et le plan des xy est

$$\frac{z}{by}\sqrt{b^2y^2 + a^2z^2}.$$

Pour équation du plan osculateur, on trouve

$$(x' - x)\, b\left[a^2z^2 - by^2\sqrt{a^2 - y^2}\right] - (y' - y)\, b^2y^3 + (z' - z)\, a^2z^3 = o.$$

Au point de la courbe dont les coordonnées sont

$$y = o,\ \ x = b - a \text{ et } z = \sqrt{r^2 - (b - a)^2},$$

ce plan devient

$$bx' + z'\sqrt{r^2 - (b - a)^2} = r^2 + ab - a^2,$$

c'est-à-dire parallèle à l'axe des y.

8. L'hélice conique a pour équations

$$x^2 + y^2 = \frac{a}{h}(a - z)^2,$$

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = \cot g^2 v;$$

a représentant le rayon de la base du cône; h, la hauteur du cône; v, l'inclinaison constante des tangentes sur la base.

En représentant par k la quantité

$$\sqrt{\frac{h^2}{a^2}\cot g^2 v - 1},$$

on a

$$\frac{dx}{dz} = \frac{ky - x}{a - z} \text{ et } \frac{dy}{dz} = -\frac{kx + y}{a - z}.$$

D'où, facilement, les dérivées d'ordre supérieur par rapport à z et celle de l'arc de courbure

$$\frac{ds}{dz} = \frac{1}{\sin v}.$$

Les équations de la normale principale sont

$$y' - y = \frac{ky - x}{kx + y}(x' - x) \text{ et } z' = z.$$

Le rayon de courbure a pour expression

$$\rho = \frac{2(a - z)}{k \sin 2v}.$$

Les coordonnées du centre de courbure sont

$$X = -\frac{y}{k\cos^2 v} - x \operatorname{tang}^2 v,$$

$$Y = \frac{x}{k\cos^2 v} - y \operatorname{tang}^2 v,$$

$$Z = z.$$

Pour angle de torsion on obtient

$$\varepsilon = \frac{k \sin^2 v}{a - x} ds.$$

Nota. — Nous n'avons déterminé que certains éléments des courbes qui font le sujet des exercices précédents; nous engageons les élèves à calculer les autres et à interpréter les résultats de l'analyse.

CHAPITRE XVII.

ENVELOPPES DES LIGNES ET DES SURFACES.

Soient $$F(x, y, a) = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
l'équation d'une courbe contenant le paramètre variable a,

et $$\frac{dF}{da} = o. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

sa dérivée par rapport à a.

Pour trouver l'enveloppe de toutes les courbes que l'on obtiendrait en faisant varier a d'une manière continue dans l'équation (1), il suffit d'éliminer ce paramètre entre les équations (1) et (2).

Soit encore $$F(x, y, a, b) = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$
l'équation d'une courbe renfermant les paramètres variables a et b liés par l'équation

$$\varphi(a, b) = o. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Pour trouver l'enveloppe de cette courbe, on suit l'un ou l'autre des deux procédés suivants :

1° Si l'expression de l'un des paramètres en fonction de l'autre peut être fournie par (4) et si cette expression est simple, on la substitue dans (3), et, celle-ci ne renfermant plus alors qu'un seul paramètre, on opère comme précédemment;

2° Si la résolution de l'équation (4) est difficile ou impossible, ou bien si l'expression de l'un des paramètres en fonction de l'autre est compliquée, on dérive, en considé-

rant b comme fonction de a, les équations (3) et (4) par rapport à a, puis, entre les résultats obtenus, on élimine $\frac{db}{da}$. On obtient ainsi une nouvelle équation entre a et b, puis, entre cette équation et les équations (3) et (4), on élimine a et b. On emploie avec avantage dans ce calcul la méthode du multiplicateur indéterminé.

Règles analogues pour déterminer l'enveloppe d'une courbe dont l'équation renferme trois paramètres variables liés par deux équations, etc.

Remarque. — Étant donnée l'équation (3), on peut se proposer de chercher la relation qui doit exister entre a et b pour qu'en remplaçant, dans l'équation proposée, l'un des paramètres par sa valeur en fonction de l'autre, l'enveloppe soit une courbe donnée

$$f(x, y) = o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Pour obtenir cette relation, il suffit de tirer de chacune des équations (3) et (5) la valeur de $\frac{dy}{dx}$, de les égaler, puis d'éliminer x et y entre l'équation résultante et les équations (3) et (5).

Les procédés sont les mêmes que les précédents pour obtenir l'enveloppe d'une surface donnée.

Ainsi
$$\mathrm{F}(x, y, z, a) = o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$
étant l'équation d'une surface qui renferme le paramètre variable a, on obtient l'équation de l'enveloppe en éliminant a entre (6) et la dérivée

$$\frac{d\mathrm{F}}{da} = o. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7).$$

Quand l'équation de la surface est de la forme

$$F(x, y, z, a, b) = o,$$

sachant que $\varphi(a, b) = o,$

il y a lieu d'opter entre deux procédés, etc.

Remarque. — Si entre les équations (6), (7) et $\frac{d^2F}{da^2} = o$, on élimine a, on obtient les équations de l'arête de rebroussement.

Exemple I.

Enveloppe des droites déterminées par l'équation

$$y = ax + \frac{p}{2a},$$

a étant le paramètre variable.

On a

$$F = y - ax - \frac{p}{2a} = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

$$\frac{dF}{da} = - x + \frac{p}{2a^2} = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

De l'équation (2), on tire

$$a = \sqrt{\frac{p}{2x}},$$

et, en substituant cette valeur de a dans (1), on obtient, après réductions, pour équation de l'enveloppe, la parabole

$$y^2 = 2px.$$

Exemple II.

Enveloppe de tous les ellipsoïdes de révolution représentés par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

les axes étant liés par la relation

$$a^2 + b^2 = k^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Dérivant (1) et (2) par rapport à a, en considérant b comme fonction de a, il vient

$$\frac{x^2}{a^3} + \frac{y^2 + z^2}{b^3}\frac{db}{da} = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

$$a + b\frac{db}{da} = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Multipliant (3) par le multiplicateur indéterminé λ et retranchant (4), membre à membre, on a

$$\lambda\frac{x^2}{a^3} - a + \left[\lambda\frac{y^2 + z^2}{b^2} - b\right]\frac{db}{da} = o.$$

D'où

$$\lambda\frac{x^2}{a^3} = a \text{ et } \lambda\frac{y^2 + z^2}{b^3} = b.$$

Multipliant respectivement ces deux équations par a et b, additionnant, puis tenant compte des équations (1) et (2), on trouve $\lambda = k^2$.

Donc
$$k^2\frac{x^2}{a^3} = a \text{ et } k^2\frac{y^2 + z^2}{b^3} = b.$$

D'où
$$a^2 = \pm kx \text{ et } b^2 = \pm k\sqrt{y^2 + z^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (2), il vient

$$\pm x \pm \sqrt{y^2 + z^2} = k,$$

pour équation des enveloppes.

Exemple III.

Quelle relation doit-il exister entre les paramètres a et b de la ligne de droite

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

pour que l'enveloppe soit le cercle

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)?$$

De (1), on tire

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a};$$

de (2),

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Égalant ces valeurs de $\frac{dy}{dx}$, on a

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Or (3) donne $x = \frac{by}{a}$ et, par substitution de cette valeur de x dans (1), on trouve

$$y = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}$$

et, par suite,

$$x = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}.$$

Substituant ces valeurs de x et de y dans (1), on trouve pour la relation cherchée

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{r^2}.$$

Exercices.

1. Enveloppe des paraboles représentées par l'équation

$$y = ax - \frac{1 + a^2}{4h} x^2,$$

a étant un paramètre variable.

On trouve pour équation de l'enveloppe cette autre parabole

$$x^2 = 4h(h - y).$$

La parabole proposée est celle qui est décrite dans le vide par un point matériel pesant, a représentant le coefficient angulaire de la direction de la vitesse initiale avec

l'axe des x et les ordonnées étant prises en sens contraire de la pesanteur.

2. Enveloppe des ellipses représentées par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(k-a)^2} = 1,$$

a étant le paramètre variable.

L'équation de l'enveloppe est

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}.$$

3. Enveloppe des cercles représentés par l'équation

$$(x-a)^2 + y^2 = b^2,$$

les paramètres a et b étant liés par la relation $b^2 = 4ma$.

On trouve pour équation de l'enveloppe

$$y^2 = 4m(x+m).$$

4. Enveloppe des droites représentées par l'équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

les paramètres a et b étant liés par la relation

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = 1.$$

L'enveloppe a pour équation

$$\sqrt{\frac{x}{m}} + \sqrt{\frac{y}{n}} = 1.$$

5. Enveloppe des ellipses représentées par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

a et b, paramètres variables, étant tels que

$$\frac{a^2}{m^2} + \frac{b^2}{n^2} = 1.$$

On obtient pour équation des lignes enveloppes

$$\pm \frac{x}{m} \pm \frac{y}{n} = 1.$$

Quatre lignes droites.

6. Enveloppe d'une droite de longueur constante qui se meut en s'appuyant sur deux axes rectangulaires.

En représentant par l la longueur de la droite et par a, b les distances de l'origine aux points où elle rencontre les axes, la question se ramène à chercher l'enveloppe de la droite

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

a et b, paramètres variables, étant liés par l'équation

$$a^2 + b^2 = l^2.$$

L'enveloppe est représentée par l'équation

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}.$$

7. Enveloppe des cordes joignant les extrémités des diamètres conjugués de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

x' et y' étant les coordonnées de l'extrémité de l'un des diamètres, $\frac{a}{b} y'$ et $-\frac{b}{a} x'$ sont celles de l'extrémité de l'autre et la corde a pour équation

$$x'\left(y - \frac{b}{a}\right)x - y'\left(x + \frac{a}{b}\right)y + ab = o.$$

La question est donc ramenée à chercher l'enveloppe de toutes les cordes représentées par l'équation précédente, x' et y', paramètres variables, étant liés par la relation

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

On trouve pour équation de l'enveloppe

$$\frac{2y^2}{b^2} + \frac{2x^2}{a^2} = 1,$$

ellipse dont les axes sont

$$\frac{a}{\sqrt{2}} \text{ et } \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

8. Par un point donné, on mène à un cercle donné une sécante quelconque et, sur la corde interceptée, comme diamètre, on décrit une circonférence. Quelle est l'enveloppe de toutes les circonférences obtenues par le même procédé?

En prenant le point donné comme origine et pour axe des x la droite menée de ce point au centre du cercle donné, on obtient pour équation de ce cercle de rayon R

$$(x - m)^2 + y^2 = R^2$$

et, pour celle d'une sécante, $y = ax$.

L'équation de la circonférence décrite sur la corde interceptée est, par suite,

$$\left(x - \frac{m}{1 + a^2}\right)^2 + \left(y - \frac{am}{1 + a^2}\right)^2 = R^2 - \frac{m^2a^2}{1 + a^2}$$

et l'enveloppe de cette courbe, qui ne contient que le paramètre variable a, est

$$(x^2 - mx + m^2 + y^2 - R^2)^2 - m^2(x^2 + y^2) = 0.$$

9. Par un point quelconque d'une courbe de deuxième ordre, on mène à une ellipse deux tangentes, puis la corde qui joint les points de contact. Quelle est l'enveloppe de toutes les cordes ainsi obtenues?

Soient a et b les coordonnées du point pris sur la courbe de deuxième ordre dont l'équation est

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + 1 = 0,$$

et soit

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$$

l'équation de l'ellipse.

Si par le point (a, b) on mène deux tangentes à l'ellipse, la corde des points de contact est

$$\frac{ax}{m^2} + \frac{by}{n^2} = 1.$$

On doit donc chercher l'enveloppe de toutes les cordes représentées par cette dernière équation, a et b étant liés par la relation

$$Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + 1 = o.$$

On obtient pour équation de l'enveloppe

$$(C - E^2)\frac{x^2}{m^4} - 2(B - DE)\frac{xy}{m^2n^2} + (A - D^2)\frac{y^2}{n^4} + 2(CD - BE)\frac{x}{m^2}$$
$$+ 2(AE - BD)\frac{y}{n^2} + AC - B^2 = o.$$

La question que l'on vient de traiter est un cas particulier du problème général des *polaires réciproques*. (Poncelet, *Annales de Gergonne*, vol. VIII.)

10. Le centre d'un cercle variable se meut sur l'axe des x. Quelle relation faut-il établir entre l'abcisse du centre et le rayon pour que l'enveloppe soit une droite passant par l'origine?

Soient

$$(x - a)^2 + y^2 = b^2,$$
$$y = mx,$$

l'équation du cercle et celle de la droite.

On trouve pour la relation cherchée

$$b^2 = \frac{a^2m^2}{1 + m^2}.$$

11. Même problème en supposant que l'enveloppe du cercle variable doive être l'ellipse

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1.$$

On obtient

$$b^2 = n^2\left(1 - \frac{a^2}{m^2 - n^2}\right).$$

12. Même question en supposant que l'enveloppe du cercle variable doive être la parabole

$$y^2 = 2px.$$

La relation cherchée est

$$b^2 = p(2a - p).$$

13. Même question, l'enveloppe du cercle devant être l'hyperbole

$$\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1.$$

La relation demandée est

$$b^2 = n^2\left(\frac{a^2}{m^2 + n^2} - 1\right).$$

14. Enveloppe de toutes les normales à la parabole dont l'équation est $y^2 = 2px$.

L'équation de la normale à la parabole proposée est

$$y' - y = -\frac{y}{p}(x' - x).$$

Il faut donc chercher l'enveloppe de toutes les droites représentées par cette équation, les paramètres variables y et x étant liés par la relation

$$y^2 = 2px.$$

On trouve pour équation de cette enveloppe

$$y'^2 = \frac{1}{p}\left[\frac{2(x' - p)}{3}\right]^3.$$

C'est l'équation trouvée pour la développée de la parabole $y^2 = 2px$. (Voir chapitre XIV, section II, exemple I.) On sait, en effet, que l'enveloppe de toutes les normales à une courbe est la développée de cette courbe. Les questions proposées sur les développées pourront donc servir d'exercices pour la recherche des lignes enveloppes.

15. D'un point émanent dans toutes les directions d'un même plan des rayons de lumière. Ceux-ci étant renvoyés par une courbe située dans le plan, déterminer l'enveloppe des rayons réfléchis.

En prenant pour origine le point de départ des rayons et désignant par x, y les coordonnées du point où le rayon rencontre la courbe; par α le coefficient angulaire de la tangente à la courbe au point (x, y); par μ la tangente trigonométrique de l'angle du rayon et de la tangente à la courbe au même point (x, y); tenant compte d'ailleurs de l'égalité des angles d'incidence et de réflexion, on trouve pour équation du rayon réfléchi au point (x, y)

$$y' - y = \frac{\alpha - \mu}{1 + \alpha\mu}(x' - x).$$

L'enveloppe du rayon s'obtiendra du reste par les procédés ordinaires.

Ainsi, la courbe réfléchissante étant l'ellipse

$$\frac{(x-e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

dont un des foyers, pris pour origine, coïncide avec le point lumineux, on trouve aisément

$$\alpha = -\frac{b^2}{a^2}\frac{(x-e)}{y},$$

$$\mu = \frac{b^2}{ey};$$

et, par suite, pour équation du rayon réfléchi,

$$y' - y = \frac{y}{x - 2e}(x' - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Ensuite en considérant, dans cette équation, x et y comme deux paramètres variables liés par la relation (1), on verra que l'enveloppe se réduit à un point

$$y' = o, \quad x' = 2e;$$

c'est-à-dire au second foyer de l'ellipse.

L'exercice traité a rapport au ***Problème des caustiques par réflexion***, si important en optique.

16. Enveloppe des sphères représentées par l'équation

$$(x-a)^2+y^2+z^2=\frac{n^2}{m^2}(m^2-a^2),$$

a étant un paramètre variable.

L'équation de la surface enveloppe est

$$\frac{x^2}{m^2+n^2}+\frac{y^2+z^2}{n^2}=1;$$

celle d'un ellipsoïde de révolution.

17. Enveloppe des plans passant par un point donné et tous à égale distance d'un second point donné.

Soient pris pour origine le second point donné et, pour axe des z, la droite passant par les deux points; on aura à chercher l'enveloppe des plans

$$ax+by+z=m,$$

les paramètres variables a et b étant liés par la distance p de l'origine à chacun des plans, soit par l'expression

$$p=\frac{m}{\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

L'équation de l'enveloppe est

$$(m^2-p^2)(x^2+y^2)-p^2(m-z)^2=o;$$

celle d'un cône à base circulaire.

18. Enveloppe d'une sphère donnée dont le centre se meut sur une circonférence aussi donnée.

Il faudra chercher l'enveloppe des sphères représentées par l'équation

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=R^2,$$

les paramètres variables a et b étant liés par l'équation du cercle

$$a^2+b^2=k^2.$$

On trouve pour enveloppe

$$\left(k \pm \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = R^2 - z^2,$$

équation du tore.

19. Si l'on coupe un hyperboloïde à une nappe par un plan et que, par tous les points de la courbe d'intersection, on mène des plans tangents à l'hyperboloïde, quelle sera la surface enveloppe des plans tangents?

Soient
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

et
$$Ax + By + Cz = D$$

les équations de l'hyperboloïde et du plan sécant.

Celle du plan tangent à l'hyperboloïde est

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - \frac{zz'}{c^2} = 1$$

et c'est de ce plan qu'il faut chercher l'enveloppe; x, y et z étant trois paramètres variables liés par les deux équations précédentes.

Différentiant les trois équations par rapport à x, y, z, on a

$$\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} - \frac{zdz}{c^2} = o,$$
$$Adx + Bdy + Cdz = o,$$
$$\frac{x'dx}{a^2} + \frac{y'dy}{b^2} - \frac{z'dz}{c^2} = o.$$

Multipliant respectivement ces trois équations par λ, 1 et μ, ajoutant, puis égalant à o les coefficients de dx, dy et dz, on obtient

$$\lambda\frac{x}{a^2} + \mu\frac{x'}{a^2} + A = o,$$
$$\lambda\frac{y}{b^2} + \mu\frac{y'}{b^2} + B = o,$$
$$-\lambda\frac{z}{c^2} - \mu\frac{z'}{c^2} + C = o.$$

Multipliant de même ces trois dernières équations par

x, y, z et ajoutant, on trouve en tenant compte des équations de l'ellipsoïde, du plan tangent et du plan sécant

$$\lambda + \mu + D = o; \text{ d'où } \lambda = -\mu - D.$$

Substituant cette valeur de λ dans les équations précédentes, il vient

$$\begin{aligned} Aa^2 - Dx &= \mu(x - x'), \\ Bb^2 - Dy &= \mu(y - y'), \\ -Cc^2 - Dz &= \mu(z - z'). \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{x - x'}{Aa^2 - Dx} = \frac{y - y'}{Bb^2 - Dy} = \frac{z - z'}{-Cc^2 - Dz} \text{ ou } \frac{z' - z}{Cc^2 + Dz} = \mu.$$

Multipliant les deux termes de chacun de ces trois rapports égaux respectivement par $\frac{x'}{a^2}, \frac{y'}{b^2}, \frac{z'}{c^2}$, on trouve, en vertu d'une propriété connue des suites proportionnelles et après réduction,

$$\frac{1 - \left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2}\right)}{Ax' + By' + Cz' - D} = \mu,$$

et, en multipliant les deux termes de chaque rapport respectivement par A, B et C,

$$\frac{D - (Ax' + By' + Cz')}{A^2a^2 + B^2b^2 - C^2c^2 - D^2} = \mu.$$

En égalant ces deux dernières valeurs de μ, on obtient

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} - 1 = \frac{[D - (Ax' + By' + Cz')]^2}{A^2a^2 + B^2b^2 - C^2c^2 - D^2}.$$

C'est l'équation de la surface cherchée.

Si la surface donnée eût été celle de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

on aurait trouvé pour équation de l'enveloppe

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} - 1 = \frac{[D - (Ax' + By' + Cz')]^2}{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 - D^2}.$$

20. Enveloppe des plans représentés par l'équation

$$Ax + By + Cz = D,$$

les paramètres variables A, B, C et D étant liés par les relations

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1,$$

$$\frac{A^2}{D^2 - a^2} + \frac{B^2}{D^2 - b^2} + \frac{C^2}{D^2 - c^2} = o.$$

Différentiant les trois équations précédentes par rapport à A, B, C; multipliant respectivement les équations résultantes par λ, μ et 1; puis égalant à o les coefficients de dA, dB, dC, dD, on trouve

$$\lambda x = A\mu + \frac{A}{D^2 - a^2} \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

$$\lambda y = B\mu + \frac{B}{D^2 - b^2} \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

$$\lambda z = C\mu + \frac{C}{D^2 - c^2} \quad \ldots \ldots \quad (3),$$

$$\lambda = D\left[\frac{A^2}{(D^2 - a^2)^2} + \frac{B^2}{(D^2 - b^2)^2} + \frac{C^2}{(D^2 - c^2)^2}\right] \quad (4).$$

Multipliant respectivement (1), (2) et (3) par A, B, C et additionnant, on a

$$\lambda D = \mu \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

Multipliant les mêmes équations par x, y, z, additionnant et représentant $x^2 + y^2 + z^2$ par R^2, il vient

$$\lambda R^2 = D\mu + \frac{Ax}{D^2 - a^2} + \frac{By}{D^2 - b^2} + \frac{Cz}{D^2 - c^2}.$$

D'où, en vertu de (5),

$$\lambda(R^2 - D^2) = \frac{Ax}{D^2 - a^2} + \frac{By}{D^2 - b^2} + \frac{Cz}{D^2 - c^2} \quad (6).$$

Enfin, élevant au carré les deux membres des mêmes équations (1), (2) et (3), et additionnant, il vient

$$\lambda^2 R^2 = \mu^2 + \frac{A^2}{(D^2 - a^2)^2} + \frac{B^2}{(D^2 - b^2)^2} + \frac{C^2}{(D^2 - c^2)^2}.$$

D'où, en vertu de (4) et de (5),

$$\lambda = \frac{1}{D(R^2 - D^2)} \text{ et, par suite, } \mu = \frac{1}{R^2 - D^2}.$$

Substituant ces valeurs de λ et de μ dans (1), (2) et (3), on trouve

$$\frac{x}{R^2 - a^2} = \frac{AD}{D^2 - a^2},$$

$$\frac{y}{R^2 - b^2} = \frac{BD}{D^2 - b^2},$$

$$\frac{z}{R^2 - c^2} = \frac{CD}{D^2 - c^2}.$$

Multipliant respectivement ces équations par x, y, z et ajoutant, il vient, en vertu de l'équation (6) et de la valeur de λ,

$$\frac{x^2}{R^2 - a^2} + \frac{y^2}{R^2 - b^2} + \frac{z^2}{R^2 - c^2} = 1.$$

C'est l'équation de l'enveloppe cherchée ; celle de la surface de l'onde lumineuse se propageant dans un milieu cristallisé. (Voir Fresnel, *Mémoires de l'Institut*, vol. VII.)

CHAPITRE XVIII.

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

Soit $\frac{f(x)}{F(x)}$ une fraction dont les termes sont des fonctions entières et rationnelles de x, le degré du numérateur étant moindre que celui du dénominateur.

La décomposition d'une telle fraction en fractions plus

simples se fait en posant d'abord $F(x) = o$ et déterminant les racines de cette équation.

1° Si les racines sont réelles et inégales, on écrit

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \dots \quad (1),$$

a, b, c, etc. représentant les racines et A, B, C, etc., des constantes à déterminer.

2° Si les racines sont réelles et égales, on pose

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a} \quad (2),$$

a étant la racine contenue n fois dans $F(x) = o$ et $A_n, A_{n-1}, \dots A_1$, n constantes à déterminer.

3° Si les racines sont imaginaires et inégales, on écrit

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{Cx+D}{(x-\gamma)^2+\delta^2} + \frac{Ex+F}{(x-\varepsilon)^2+\zeta^2} + \dots (3),$$

les racines conjuguées étant

$$\begin{cases} \alpha + \beta\sqrt{-1}, \\ \alpha - \beta\sqrt{-1}, \end{cases} \begin{cases} \gamma + \delta\sqrt{-1}, \\ \gamma - \delta\sqrt{-1}, \end{cases} \begin{cases} \varepsilon + \zeta\sqrt{-1}, \\ \varepsilon - \zeta\sqrt{-1}, \text{ etc.} \end{cases}$$

et A, B, C, D, etc., des constantes à déterminer.

4° Enfin, si les racines sont imaginaires et égales, on pose

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_n x + B_n}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} + \frac{A_{n-1}x + B_{n-1}}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}}$$
$$+ \dots + \frac{A_1 x + B_1}{(x-\alpha)^2+\beta^2} \quad \dots \quad (4),$$

les racines conjuguées et égales de $F(x) = o$ étant par couples,

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},$$
$$\alpha - \beta\sqrt{-1},$$

et $A_n, B_n, A_{n-1}, B_{n-1}$, etc., des constantes à calculer.

Le calcul différentiel fournit ensuite, dans chaque cas, le moyen de déterminer les constantes.

Dans le premier cas,

$$A=\frac{f(a)}{F'(a)},\ B=\frac{f(b)}{F'(b)},\ \text{etc.}$$

Dans le deuxième cas,

$$A_n=f(a),\ A_{n-1}=\frac{f'(a)}{1},\ A_{n-2}=\frac{f''(a)}{1.2}\dots\ A_1=\frac{f^{n-1}(a)}{1.2.3\dots(n-1)}.$$

Dans le troisième cas, on a pour déterminer A et B l'équation imaginaire

$$A\left(\alpha\pm\beta\sqrt{-1}\right)+B=\pm 2\beta\sqrt{-1}\,\frac{f\left(\alpha\pm\beta\sqrt{-1}\right)}{F'\left(\alpha\pm\beta\sqrt{-1}\right)};$$

pour déterminer C et D,

$$C\left(\gamma\pm\delta\sqrt{-1}\right)+D=\pm 2\delta\sqrt{-1}\,\frac{f\left(\gamma\pm\delta\sqrt{-1}\right)}{F'\left(\gamma\pm\delta\sqrt{-1}\right)};$$

etc.

Dans le quatrième cas, on a, pour déterminer les constantes, le système d'équations

$$f\left(\alpha\pm\beta\sqrt{-1}\right)=A_n\left(\alpha\pm\beta\sqrt{-1}\right)+B_n,$$

$$f'\left(\alpha\pm\beta\sqrt{-1}\right)=A_n\pm\left[A_{n-1}\left(\alpha\pm\beta\sqrt{-1}\right)+B_{n-1}\right]2\beta\sqrt{-1},$$

etc.,

équations que l'on trouve en multipliant les deux membres de l'équation (4) par $F(x)$, dérivant $n-1$ fois de suite, puis remplaçant dans les équations résultantes x par $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$.

Quand l'équation $F(x)=o$ fournit à la fois différentes sortes de racines, on écrit d'abord que la fraction proposée est égale à la somme des fractions que l'on trouve en additionnant ceux des seconds membres des équations (1), (2), (3) et (4) qui se rapportent aux diverses espèces de racines,

puis les constantes relatives aux racines inégales, soient réelles, soient imaginaires, se calculent comme précédemment. Quant aux constantes relatives aux racines égales, leur détermination s'effectue de la manière suivante :

Soit $$F(x) = (x - a)^n \varphi(x),$$

c'est-à-dire, supposons que l'équation $F(x) = o$ fournisse en même temps n racines égales à a et des racines d'autres sortes.

On écrira

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n \varphi(x)} = \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{A_1}{x-a} + S \quad (5),$$

S représentant une suite d'autres fractions relatives aux racines inégales, puis on déterminera A_n, A_{n-1} .... A_1 au moyen des équations

$$f(a) = A_n \varphi(a),$$
$$f'(a) = A_n \varphi'(a) + A_{n-1} \varphi(a),$$
$$f''(a) = A_n \varphi''(a) + 2A_{n-1} \varphi'(a) + 2A_{n-2} \varphi(a),$$

etc.,

équations que l'on trouve en multipliant les deux membres de (5) par $(x-a)^n \varphi(x)$, dérivant $n - 1$ fois et remplaçant x par a dans les équations résultantes.

Même procédé si l'on avait

$$F(x) = [(x - \alpha)^2 + \beta^2]^n \varphi(x),$$

ou si l'équation $F(x) = o$ fournissait plusieurs groupes de racines égales.

Exemple I.

$$\frac{12x^2 - 70x + 98}{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}.$$

En posant $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = o$, on trouve que cette équation a ses racines réelles et inégales; $x = 2$, $x = 3$ et $x = 4$.

On écrit donc

$$\frac{12x^2 - 70x + 98}{x^3 - 9x^2 + 26x - 24} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-4};$$

et comme $\dfrac{f(x)}{F'(x)} = \dfrac{12x^2 - 70x + 98}{3x^2 - 18x + 26}$,

on obtient $A = \dfrac{f(2)}{F'(2)} = \dfrac{12.2^2 - 70.2 + 98}{3.2^2 - 18.2 + 26} = 3$

et $B = \dfrac{f(3)}{F'(3)} = 4$, $C = \dfrac{f(4)}{F'(4)} = 5$.

Donc $\dfrac{12x^2 - 70x + 98}{x^3 - 9x^2 + 26x - 24} = \dfrac{3}{x-2} + \dfrac{4}{x-3} + \dfrac{5}{x-4}$.

Exemple II.

$$\frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6}.$$

Puisque $(x-1)^6 = o$ donne six racines dont chacune est égale à l'unité, on pose

$$\frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6} = \frac{A_6}{(x-1)^6} + \frac{A_5}{(x-1)^5} + \frac{A_4}{(x-1)^4} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1}.$$

Or, l'on a
$$\left\{\begin{aligned} f(x) &= x^4 + 2x^2 + 1, \\ f'(x) &= 4x^3 + 4x, \\ f''(x) &= 12x^2 + 4, \\ f'''(x) &= 24x, \\ f^{\text{IV}}(x) &= 24, \\ f^{\text{V}}(x) &= 0. \end{aligned}\right.$$

D'où
$$\left\{\begin{aligned} A_6 &= f(1) = 4, \\ A_5 &= \frac{f'(1)}{1} = 8, \\ A_4 &= \frac{f''(1)}{1.2} = 8, \\ A_3 &= \frac{f'''(1)}{1.2.3} = 4, \\ A_2 &= \frac{f^{\text{IV}}(1)}{1.2.3.4} = 1, \\ A_1 &= \frac{f^{\text{V}}(1)}{1.2.3.4.5} = 0. \end{aligned}\right.$$

Donc,

$$\frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6} = \frac{4}{(x-1)^6} + \frac{8}{(x-1)^5} + \frac{8}{(x-1)^4} + \frac{4}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Exemple III.

$$\frac{6x^2+25x-9}{x^4-14x^3+107x^2-422x+850}.$$

L'équation $x^4-14x^3+107x^2-422x+850=o$ fournit les couples de racines imaginaires :

$$\begin{matrix} 3+5\sqrt{-1}, \\ 3-5\sqrt{-1}, \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} 4+3\sqrt{-1}, \\ 4-3\sqrt{-1}. \end{matrix}$$

En conséquence, on écrit

$$\frac{6x^2+25x-9}{x^4-14x^3+107x^2-422x+850} = \frac{Ax+B}{(x-3)^2+25} + \frac{Cx+D}{(x-4)^2+9},$$

et comme, dans l'exemple actuel,

$$\frac{f(x)}{F'(x)} = \frac{6x^2+25x-9}{4x^3-42x^2+214x-422},$$

d'où

$$\frac{f(3+5\sqrt{-1})}{F'(3+5\sqrt{-1})} = \frac{61\sqrt{-1}-6}{20-30\sqrt{-1}},$$

l'équation qui sert à déterminer A et B (voir les équations générales du troisième cas), est

$$A(3+5\sqrt{-1})+B=10\sqrt{-1}\,.\,\frac{61\sqrt{-1}-6}{20-30\sqrt{-1}};$$

d'où l'on tire, par la méthode ordinaire,

$$A=-3 \text{ et } B=1.$$

On trouverait de même pour déterminer C et D, l'équation

$$C(4+3\sqrt{-1})+D=6\sqrt{-1}\,\frac{133+219\sqrt{-1}}{102\sqrt{-1}-36}.$$

D'où $\quad C=3$ et $D=-1$.

On a donc

$$\frac{6x^2+25x-9}{x^4-14x^3+107x^2-422x+850}=\frac{-3x+1}{(x-3)^2+25}+\frac{3x-1}{(x-4)^2+9}.$$

Exemple IV.

$$\frac{x(2x^2-x+5)}{(x^2+1)^2}.$$

L'équation $(x^2+1)^2=o$ fournit deux couples de racines imaginaires égales, $\pm\sqrt{-1}$.

On écrit, par conséquent,

$$\frac{2x^3-x^2+5x}{(x^2+1)^2}=\frac{A_2x+B_2}{(x^2+1)^2}+\frac{A_1x+B_1}{x^2+1}.$$

Mais, ici, $\quad f(x)=2x^3-x^2+5x,$

et $\quad f'(x)=6x^2-2x+5.$

D'où

$$f(\sqrt{-1})=3\sqrt{-1}+1,$$

$$f'(\sqrt{-1})=-2\sqrt{-1}-1.$$

La première équation générale fournit donc pour déterminer A_2 et B_2

$$3\sqrt{-1}+1=A_2\sqrt{-1}+B_2,$$

d'où $\quad A_2=3$ et $B_2=1$;

et la deuxième,

$$-2\sqrt{-1}-1=3+(A_1\sqrt{-1}+B_1)\,2\sqrt{-1},$$

d'où $\quad A_1=2$ et $B_1=-1$.

Donc

$$\frac{x(2x^2-x+5)}{(x^2+1)^2}=\frac{3x+1}{(x^2+1)^2}+\frac{2x-1}{x^2+1}.$$

Exemple V.

$$\frac{x^2}{(x+a)^2(x^2+a^2)}.$$

L'équation $(x+a)^2(x^2+a^2)=o$ a deux racines réelles égales et deux imaginaires :

$$-a,\ -a,\ +\sqrt{-a},\ -\sqrt{-a}.$$

On écrit donc

$$\frac{x^2}{(x+a)^2(x^2+a^2)}=\frac{A_2}{(x+a)^2}+\frac{A_1}{x+a}+\frac{Ax+B}{x^2+a^2}.$$

Pour déterminer A_2 et A_1 on emploiera les formules relatives à l'équation (5). Or, ici,

$$\begin{cases} f(x)=x^2, \\ f'(x)=2x, \end{cases} \text{d'où} \begin{cases} f(-a)=a^2, \\ f'(-a)=-2a; \end{cases}$$

$$\text{et} \begin{cases} \varphi(x)=x^2+a^2, \\ \varphi'(x)=2x, \end{cases} \text{d'où} \begin{cases} \varphi(-a)=2a^2, \\ \varphi'(-a)=-2a. \end{cases}$$

Donc les formules propres à donner les constantes cherchées, sont

$$a^2=A_2.2a^2,$$
$$-2a=-A_2.2a+A_1.2a^2.$$

La première fournit $A_2=\frac{1}{2}$ et la seconde, $A_1=-\frac{1}{2a}$.

Quant aux constantes A et B, on les calculera par la première formule générale du troisième cas et comme dans l'exemple III. On trouvera

$$A=\frac{1}{2a},\quad B=o.$$

Par conséquent

$$\frac{x^2}{(x+a)^2(x^2+a^2)}=\frac{1}{2(x+a)^2}-\frac{1}{2a(x+a)}+\frac{x}{2a(x^2+a^2)}.$$

Exemple VI.

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{x^3(x-2)(x^2+1)^2}.$$

Le dénominateur égalé à o donne une équation dont les racines sont :

$$o, o, o, 2, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}.$$

Donc on écrit

$$(\alpha) \quad \frac{x^3 - 2x + 1}{x^3(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A_3}{x^3} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_1}{x} + \frac{A}{x-2} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+1)^2} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2+1}.$$

A_3, A_2 et A_1 se déterminent comme dans l'exemple V, en prenant pour $\varphi(x)$ le produit

$$(x-2)(x^2+1)^2 \text{ ou } x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2.$$

On trouve $\quad A_3 = -\frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{3}{4}, \quad A_1 = \frac{11}{8}.$

A se calcule par la formule générale du premier cas ; on obtient

$$A = \frac{1}{40}.$$

Pour obtenir les valeurs de B_2, C_2, B_1 et C_1, il serait trop long d'avoir recours à des formules générales. Opérons comme suit :

Multiplions les deux membres de l'équation (α) par $x^3(x-2)(x^2+1)^2$; il vient

$$(\beta) \quad x^3 - 2x + 1 = (B_2 x + C_2)(x^4 - 2x^3) + (B_1 x + C_1)(x^2+1)(x^4 - 2x^3) + S(x^2+1)^2(x^4 - 2x^3),$$

en posant $\quad S = \frac{A_3}{x^3} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_1}{x} + \frac{A}{x-2}.$

Or, en remplaçant x par $\sqrt{-1}$, l'équation (β) devient

$$-\sqrt{-1}-2\sqrt{-1}+1=\left(B_2\sqrt{-1}+C_2\right)\left(1+2\sqrt{-1}\right).$$

D'où, facilement,

$$B_2=-1 \text{ et } C_2=-1.$$

Dérivant l'équation (β) et omettant les termes qui pour $x=\sqrt{-1}$ seraient nuls, on obtient

$$(\gamma) \qquad 3x^2-2=B_2(x^4-2x^3)+(B_2x+C_2)(4x^3-6x^2) + (B_1x+C_1)(x^4-2x^3)\,2x$$

et, en remplaçant x par $\sqrt{-1}$,

$$3+2\sqrt{-1}=-B_1+C_1\sqrt{-1}-2B_1\sqrt{-1}-2C_1.$$

D'où

$$B_1=-\frac{7}{5},\quad C_1=-\frac{4}{5}.$$

On a donc,

$$\frac{x^3-2x+1}{x^3(x-2)(x^2+1)^2}=-\frac{1}{2x^3}+\frac{3}{4x^2}+\frac{11}{8x}+\frac{1}{40(x-2)} -\frac{x+1}{(x^2+1)^2}-\frac{7x+4}{5(x^2+1)}.$$

Exercices.

1. $$\frac{x^2}{x^2+(a+b)x+ab}=\frac{a^2}{(b-a)(x+a)}+\frac{b^2}{(a-b)(x+b)}.$$

2. $$\frac{a(7x^2-28ax+24a^2)}{x^3-7ax^2+14a^2x-8a^3}=\frac{a}{x-a}+\frac{2a}{x-2a}+\frac{4a}{x-4a}.$$

3. $$\frac{1}{x^3+\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)x^2+\left(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}\right)x+\sqrt{abc}}$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)\left(x+\sqrt{a}\right)} +\frac{1}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}-\sqrt{b}\right)\left(x+\sqrt{b}\right)} +\frac{1}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(x+\sqrt{c}\right)}$$

4. $$\frac{360x^2 - 126x + 17}{24x^3 - 10x^2 - 3x + 1} = \frac{8}{2x - 1} + \frac{15}{3x - 1} + \frac{24}{4x - 1}.$$

5. $$\frac{x^2 - 1}{(x + 2)^3} = \frac{3}{(x + 2)^3} - \frac{4}{(x + 2)^2} + \frac{1}{x + 2}.$$

6. $$\frac{x^2 - x\sqrt{a} + 3}{(x + \sqrt{a})^3} = \frac{2a + 3}{(x + \sqrt{a})^3} - \frac{3\sqrt{a}}{(x + \sqrt{a})^4} + \frac{1}{(x + \sqrt{a})^3}.$$

7. $$\frac{(a + bx)^m}{(a - bx)^n} = \frac{(2a)^m}{(a - bx)^n} + \frac{m}{1}\, b\, \frac{(2a)^{m-1}}{(a - bx)^{n-1}} + \frac{m(m-1)}{1.2}\, b^2 \frac{(2a)^{m-2}}{(a - bx)^{n-2}}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\, b^3 \frac{(2a)^{m-3}}{(a - bx)^{n-3}} + \text{etc.}$$

8. $$\frac{x}{x^4 - (a + b)x^2 + ab} = \frac{x}{(b - a)(x^2 + a)} - \frac{x}{(b - a)(x^2 + b)}.$$

9. $$\frac{2(x^2 + 1)}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}.$$

10. $$\frac{12x^3 - 7x + 2}{4x^6 + 21x^4 + 21x^2 + 4} = \frac{4x - 3}{3(x^2 + 1)} - \frac{2(8x - 5)}{15(x^2 + 4)} - \frac{4x - 5}{15\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)}.$$

11. $$\frac{16(x^2 + 4)}{(4x^2 + 4x + 17)^2} = -\frac{4x + 1}{\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 4\right]^2} + \frac{2x}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 4}.$$

12. $$\frac{x^5 + 4x^3 + 7x - 4}{(x^2 + 1)^3} = \frac{4(x - 1)}{(x^2 + 1)^3} + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{x}{x^2 + 1}.$$

13. $$\frac{x^2 - x + 1}{(x^2 + x + 1)^3} = -\frac{2x}{(x^2 + x + 1)^3} + \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

14. $$\frac{5x^2 - 7x}{x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2} = \frac{1}{(x - 1)^2} - \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} + \frac{2}{x - 2}.$$

15. $$\frac{x^5+1}{x^6+x^4}=\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}+\frac{x+1}{x^2+1}.$$

16. $$\frac{15x^5+5x^4+58x^3+x^2+37x-16}{x^6+4x^4-x^2-4}=\frac{x+2}{x^2+1}+\frac{3x+4}{x^2+4}+\frac{5}{x-1}+\frac{6}{x+1}.$$

17. $$\frac{x^2}{(x^2-1)^3}=-\frac{1}{8(x+1)^3}+\frac{1}{16(x+1)^2}+\frac{1}{16(x+1)}+\frac{1}{8(x-1)^3}+\frac{1}{16(x-1)^2}-\frac{1}{16(x-1)}.$$

18. $$\frac{1}{x^2(x^4-1)}=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4(x+1)}+\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{2(1+x^2)}.$$

19. $$\frac{x^5+1}{x^6+x^4}=\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}+\frac{x+1}{x^2+1}.$$

20. $$\frac{x^2}{x^3+(a+2b)x^2+b(2a+b)x+ab^2}=\frac{a^2}{(a-b)^2(a+x)}+\frac{b^2}{(a-b)(b+x)^2}+\frac{b^2-2ab}{(a-b)^2(b+x)}.$$

21. $$\frac{1}{x^3(1-x)^2(1+x)}=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+\frac{1}{2(1-x)^2}+\frac{7}{4(1-x)}-\frac{1}{4(1+x)}.$$

22. $$\frac{4x^2(x^4-x^2-1)}{x^8-2x^6-x^4-2x^2+1}=\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{1}{x^2+x-1}+\frac{1}{x^2-x-1}.$$

23. $$\frac{x^3}{x^6-2x^5+x^4+x^2-2x+1}=\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{x(1+\sqrt{2})}{4(x^2-x\sqrt{2}+1)}-\frac{x(1-\sqrt{2})}{4(x^2+x\sqrt{2}+1)}.$$

24. $$\frac{5x^2 - 2x^3 - 3x + 1}{x^6 - x^5 + 3x^3 - 4x^2 + 3x - 1} = \frac{1}{(x^2 - x + 1)^2} - \frac{1}{x^2 - x + 1}$$
$$+ \frac{2}{(2x + 1)\sqrt{5} - 5} - \frac{2}{(2x + 1)\sqrt{5} + 5}.$$

25. $$\frac{53x^3 - 10x^4 - 121x^2 + 197x - 287}{(x^2 - 5x + 8)^2 (x^2 + 7)} = \frac{2x - 1}{(x^2 - 5x + 8)^2}$$
$$- \frac{x + 5}{x^2 - 5x + 8} + \frac{x}{x^2 + 7}.$$

26. $\frac{x}{a + bx^3}$.

On a

$$\frac{x}{a + bx^3} = \frac{\frac{x}{b}}{\frac{a}{b} + x^3} = \frac{\frac{x}{b}}{R^3 + x^3} \left(\text{en faisant } \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = R\right).$$

L'équation $R^3 + x^3 = o$ a une racine réelle $-R$ et deux racines imaginaires $\frac{R}{2} \pm \frac{R}{2}\sqrt{-3}$. D'où l'on trouve facilement

$$\frac{x}{a + bx^3} = -\frac{1}{3bR(x + R)} + \frac{x + R}{3bR(x^2 - Rx + R^2)}.$$

27. $\frac{x^2}{a + bx^4}$.

On a

$$\frac{x^2}{a + bx^4} = \frac{\frac{x^2}{b}}{\frac{a}{b} + x^4} = \frac{\frac{x^2}{b}}{R^4 + x^4} \left(\text{en faisant } \sqrt[4]{\frac{a}{b}} = R\right),$$

et
$$\frac{x^2}{a + bx^4} = \frac{x}{2bR\sqrt{2}\,(x^2 - Rx\sqrt{2} + R^2)}$$
$$- \frac{x}{2bR\sqrt{2}\,(x^2 + Rx\sqrt{2} + R^2)}.$$

28. $\dfrac{x^3}{a+bx^5}$.

On a

$$\frac{x^3}{a+bx^5}=\frac{\frac{x^3}{b}}{\frac{a}{b}+x^5}=\frac{\frac{x^3}{b}}{R^5+x^5}\left(\text{en représentant}\sqrt[5]{\frac{a}{b}}\text{ par R}\right),$$

et l'on sait que les racines de l'équation $R^5+x^5=0$ peuvent se tirer de l'expression

$$x=R\cos\frac{(2k+1)\pi}{5}\pm R\sqrt{-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{5},$$

en faisant successivement dans cette expression $k=0, 1, 2$.

On trouve ainsi pour racines

$$x=-R,$$
$$x=R\cos\frac{\pi}{5}\pm R\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{5},$$
$$x=R\cos\frac{3\pi}{5}\pm R\sqrt{-1}\sin\frac{3\pi}{5},$$

et, en suivant les procédés ordinaires,

$$\frac{x^3}{a+bx^5}=-\frac{1}{5bR(x+R)}+\frac{2x\cos\frac{\pi}{5}-2R\cos\frac{2\pi}{5}}{5bR\left(x^2-2Rx\cos\frac{\pi}{5}+R^2\right)}$$
$$+\frac{2x\cos\frac{3\pi}{5}+2R\cos\frac{\pi}{5}}{5bR\left(x^2-2Rx\cos\frac{3\pi}{5}+R^2\right)}.$$

29. $\dfrac{1}{a+bx^2+cx^4}$.

On a

$$\frac{1}{a+bx^2+cx^4}=\frac{\frac{1}{c}}{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}x^2+x^4}$$

et l'équation $$x^4 + \frac{b}{c}x^2 + \frac{a}{c} = o$$

fournit $$x^2 = -\frac{b}{2c} \pm \frac{1}{2c}\sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Cela posé, si $\sqrt{b^2 - 4ac}$ est $> o$,

on posera $$\frac{b}{2c} - \frac{1}{2c}\sqrt{b^2 - 4ac} = \text{M}$$

et $$\frac{b}{2c} + \frac{1}{2c}\sqrt{b^2 - 4ac} = \text{N}.$$

et, par suite,

$$\frac{\frac{1}{c}}{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}x^2 + x^4} = \frac{\text{A}x + \text{B}}{x^2 + \text{M}} + \frac{\text{C}x + \text{D}}{x^2 + \text{N}},$$

ce qui fournira, par le procédé employé dans le troisième cas,

$$\frac{1}{a + bx^2 + cx^4} = \frac{1}{c(\text{N} - \text{M})\,(x^2 + \text{M})} + \frac{1}{c\,(\text{M} - \text{N})\,(x^2 + \text{N})}.$$

Si, au contraire, on a $\sqrt{b^2 - 4ac} < o$, on opérera comme suit :

$$\frac{\frac{1}{c}}{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}x^2 + x^4} = \frac{\frac{1}{c}}{\frac{c}{a} + 2\sqrt{\frac{a}{c}}\,x^2 \times \frac{b}{2\sqrt{ac}} + x^4} = \frac{\frac{1}{c}}{\text{R}^4 - 2\text{R}^2x^2\cos\alpha + x^4},$$

en représentant

$$\sqrt[4]{\frac{a}{c}} \text{ par R et } \frac{b}{2\sqrt{ac}} \text{ par } -\cos\alpha.$$

Or, l'équation $x^4 - 2\text{R}^2x^2\cos\alpha + \text{R}^4 = o$ fournit pour facteurs du deuxième degré

$$x^2 \pm 2\text{R}x\cos\frac{\alpha}{2} + \text{R}^2$$

et, par conséquent, l'on posera

$$\frac{\frac{1}{c}}{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}x^2+x^4}=\frac{Ax+B}{x^2-2Rx\cos\frac{\alpha}{2}+R^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2Rx\cos\frac{\alpha}{2}+R^2},$$

Le procédé ordinaire donnera alors

$$\frac{1}{a+bx^2+cx^4}=\frac{R\sin\alpha-x\sin\frac{\alpha}{2}}{2cR^3\sin\alpha\left(x^2-2Rx\cos\frac{\alpha}{2}+R^2\right)}$$
$$+\frac{R\sin\alpha+x\sin\frac{\alpha}{2}}{2cR^3\sin\alpha\left(x^2+2Rx\cos\frac{\alpha}{2}+R^2\right)}.$$

30. $\frac{x^{m-1}}{x^n-1}$, n étant pair.

Les racines de $x^n-1=o$ sont fournies par l'équation

$$x=\cos\frac{2k\pi}{n}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\ (k=0,1,2\ldots\text{etc.}),$$

ou, pour abréger, par

$$x=\cos k\theta\pm\sqrt{-1}\sin k\theta,$$

en faisant $\frac{2\pi}{n}=\theta$.

Pour $k=o$ et $k=\frac{n}{2}$, on obtient $x=1$ et $x=-1$; ce sont les racines réelles de l'équation $x^n-1=o$. Les autres racines, toutes imaginaires, se trouvent en faisant successivement $k=1,2,3\ldots\frac{n}{2}-1$.

On posera donc

$$\frac{x^{m-1}}{x^n-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\sum_{1}^{\frac{n}{2}-1}{}_k\left[\frac{Cx+D}{x^2-2x\cos k\theta+1}\right],$$

en représentant par $\sum_{1}^{\frac{n}{2}-1}{}_k$ la somme des couples de racines imaginaires correspondantes aux valeurs $k=1,2,3\ldots\frac{n}{2}-1$.

Le procédé ordinaire fournira ensuite

$$\frac{x^{m-1}}{x^n-1}=\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{x-1}+\frac{(-1)^n}{x+1}+2\sum_{1}^{\frac{n}{2}-1}{}_k\left[\frac{x\cos km\theta-\cos(m-1)k\theta}{x^2-2x\cos k\theta+1}\right]\right\}.$$

Si n est impair, on trouve de la même manière

$$\frac{x^{m-1}}{x^n-1}=\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{x-1}+2\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_k\left[\frac{x\cos km\theta-\cos(m-1)k\theta}{x^2-2x\cos k\theta+1}\right]\right\}.$$



